

Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de abril de 2016

Índice general

1. Año 2000	7
1.1. Modelo 2000 - Opción A	7
1.2. Modelo 2000 - Opción B	11
1.3. Junio 2000 - Opción A	15
1.4. Junio 2000 - Opción B	18
1.5. Septiembre 2000 - Opción A	22
1.6. Septiembre 2000 - Opción B	25
2. Año 2001	31
2.1. Modelo 2001 - Opción A	31
2.2. Modelo 2001 - Opción B	34
2.3. Junio 2001 - Opción A	37
2.4. Junio 2001 - Opción B	41
2.5. Septiembre 2001 - Opción A	46
2.6. Septiembre 2001 - Opción B	49
3. Año 2002	55
3.1. Modelo 2002 - Opción A	55
3.2. Modelo 2002 - Opción B	59
3.3. Junio 2002 - Opción A	64
3.4. Junio 2002 - Opción B	69
3.5. Septiembre 2002 - Opción A	76
3.6. Septiembre 2002 - Opción B	80
4. Año 2003	83
4.1. Modelo 2003 - Opción A	83
4.2. Modelo 2003 - Opción B	86
4.3. Junio 2003 - Opción A	90
4.4. Junio 2003 - Opción B	94
4.5. Septiembre 2003 - Opción A	97
4.6. Septiembre 2003 - Opción B	102

5. Año 2004	107
5.1. Modelo 2004 - Opción A	107
5.2. Modelo 2004 - Opción B	111
5.3. Junio 2004 - Opción A	115
5.4. Junio 2004 - Opción B	119
5.5. Septiembre 2004 - Opción A	123
5.6. Septiembre 2004 - Opción B	126
6. Año 2005	131
6.1. Modelo 2005 - Opción A	131
6.2. Modelo 2005 - Opción B	135
6.3. Junio 2005 - Opción A	139
6.4. Junio 2005 - Opción B	142
6.5. Septiembre 2005 - Opción A	145
6.6. Septiembre 2005 - Opción B	149
7. Año 2006	153
7.1. Modelo 2006 - Opción A	153
7.2. Modelo 2006 - Opción B	156
7.3. Junio 2006 - Opción A	159
7.4. Junio 2006 - Opción B	163
7.5. Septiembre 2006 - Opción A	167
7.6. Septiembre 2006 - Opción B	170
8. Año 2007	175
8.1. Modelo 2007 - Opción A	175
8.2. Modelo 2007 - Opción B	178
8.3. Junio 2007 - Opción A	182
8.4. Junio 2007 - Opción B	184
8.5. Septiembre 2007 - Opción A	188
8.6. Septiembre 2007 - Opción B	191
9. Año 2008	195
9.1. Modelo 2008 - Opción A	195
9.2. Modelo 2008 - Opción B	198
9.3. Junio 2008 - Opción A	202
9.4. Junio 2008 - Opción B	205
9.5. Septiembre 2008 - Opción A	208
9.6. Septiembre 2008 - Opción B	212
10. Año 2009	217
10.1. Modelo 2009 - Opción A	217
10.2. Modelo 2009 - Opción B	223
10.3. Junio 2009 - Opción A	227

10.4. Junio 2009 - Opción B	231
10.5. Septiembre 2009 - Opción A	234
10.6. Septiembre 2009 - Opción B	237
10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)	240
10.8. Septiembre 2009 - Opción B (Reserva)	243
11. Año 2010	247
11.1. Modelo 2010 - Opción A	247
11.2. Modelo 2010 - Opción B	251
11.3. General-Junio 2010 - Opción A	254
11.4. General-Junio 2010 - Opción B	258
11.5. Específica-Junio 2010 - Opción A	262
11.6. Específica-Junio 2010 - Opción B	265
11.7. General-Septiembre 2010 - Opción A	269
11.8. General-Septiembre 2010 - Opción B	272
11.9. Específica-Septiembre 2010 - Opción A	276
11.10. Específica-Septiembre 2010 - Opción B	279
12. Año 2011	283
12.1. Modelo 2011 - Opción A	283
12.2. Modelo 2011 - Opción B	287
12.3. Junio 2011 - Opción A	290
12.4. Junio 2011 - Opción B	294
12.5. Septiembre 2011 - Opción A	298
12.6. Septiembre 2011 - Opción B	301
13. Año 2012	305
13.1. Modelo 2012 - Opción A	305
13.2. Modelo 2012 - Opción B	308
13.3. Junio 2012 - Opción A	311
13.4. Junio 2012 - Opción B	314
13.5. Junio 2012 (coincidente)- Opción A	316
13.6. Junio 2012 (coincidente)- Opción B	320
13.7. Septiembre 2012 - Opción A	323
13.8. Septiembre 2012 - Opción B	325
14. Año 2013	329
14.1. Modelo 2013 - Opción A	329
14.2. Modelo 2013 - Opción B	333
14.3. Junio 2013 - Opción A	337
14.4. Junio 2013 - Opción B	341
14.5. Septiembre 2013 - Opción A	344
14.6. Septiembre 2013 - Opción B	348

15. Año 2014	353
15.1. Modelo 2014 - Opción A	353
15.2. Modelo 2014 - Opción B	356
15.3. Junio 2014 - Opción A	360
15.4. Junio 2014 - Opción B	363
15.5. Septiembre 2014 - Opción A	366
15.6. Septiembre 2014 - Opción B	369
16. Año 2015	373
16.1. Modelo 2015 - Opción A	373
16.2. Modelo 2015 - Opción B	376
16.3. Junio 2015 - Opción A	379
16.4. Junio 2015 - Opción B	382
16.5. Septiembre 2015 - Opción A	386
16.6. Septiembre 2015 - Opción B	388
17. Año 2016	393
17.1. Modelo 2016 - Opción A	393
17.2. Modelo 2016 - Opción B	396

Capítulo 1

Año 2000

1.1. Modelo 2000 - Opción A

Problema 1.1.1 (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$, se pide:

- a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.
- b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.
- c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1)0 \implies a = 0, \quad a = \pm 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \implies \vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son Linealmente Independientes.

Si $a = 0$ o $a = \pm 1 \implies \vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son Linealmente Dependientes.

- b) si $a = 2$, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. Luego el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ es combinación lineal

de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Veamos de que combinación lineal se trata, tenemos:

$$\begin{cases} \vec{u} = (2, 3, 4) \\ \vec{v} = (2, 1, 2) \\ \vec{w} = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$(3, 3, 0) = a(2, 3, 4) + b(2, 1, 2) + c(1, 2, 1) \implies$$

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 3 \\ 3a + b + 2c = 3 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c) Si $a = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} \vec{u} = (0, 1, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 0) \\ \vec{w} = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Sabemos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Pero

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Luego } \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$$

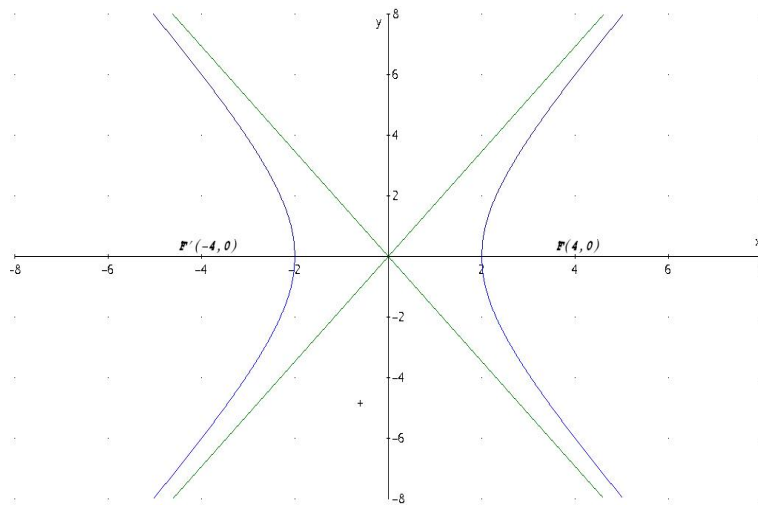
Problema 1.1.2 (2 puntos)

- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.
- Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Solución:

a)

$$d(P, A) = 2d(P, r), \quad r : x = 1, \quad A(4, 0)$$



$$\begin{cases} d(P, A) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ d(P, r) = \frac{|x-1|}{1} \end{cases} \implies (x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \implies$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

- b) Se trata de una hipérbola $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$, como $c^2 = a^2 + b^2 = 16 \implies c = 4$. Los focos serían los puntos $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$.

Problema 1.1.3 (3 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?
- b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?
- c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{1} = 3$$

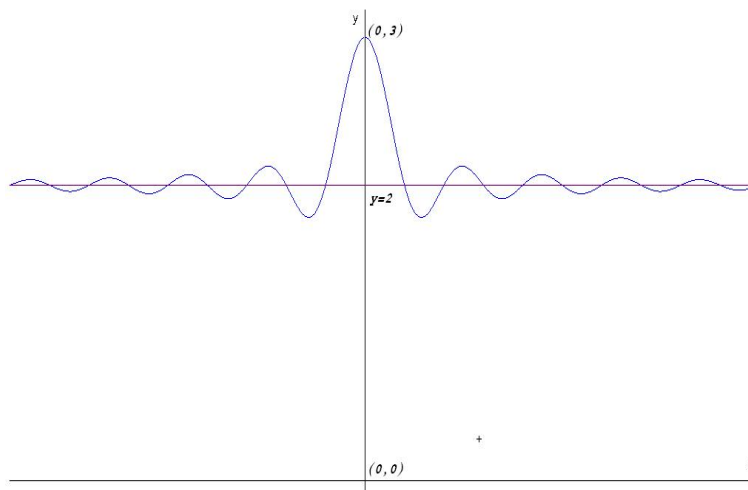
Para que f sea continua en $x = 0 \implies k = 3$

- b) Para que f sea derivable en $x = 0$ primero debe de ser continua, luego $k = 3$. Ahora se estudia si es derivable con este valor:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h}{h} + 2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - h}{h^2} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{2} = 0$$

En conclusión, para que una función sea derivable antes tiene que ser continua y por tanto $k = 3$. Y en este caso también se cumple $f'(0^-) = f'(0^+)$ y es derivable.



- c) Asíntotas:

- Verticales no hay, la única posible sería en $x = 0$ y en ese punto hay una discontinuidad evitable si $k \neq 3$ y continua si $k = 3$.
- Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \right) = 2 \implies y = 2$$

- Oblicuas no hay al haber horizontales

Problema 1.1.4 (3 puntos) Sea el sistema

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array} \right), \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Como tiene dos filas iguales y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

c) Si $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 2/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

1.2. Modelo 2000 - Opción B

Problema 1.2.1 (2 puntos) De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Hallar la expresión de $f(x)$.
- b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} + a & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f(-1) = -4 \implies a = -\frac{3}{2}$. Si f es derivable en $x = 1 \implies f$ es continua en $x = 1 \implies b = 0$. Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- b) Si $x = 2 \implies f(2) = \ln 2 \implies (2, \ln 2)$.

Tenemos $m = f'(2) = \frac{1}{2}$ y, por tanto, la recta tangente es:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

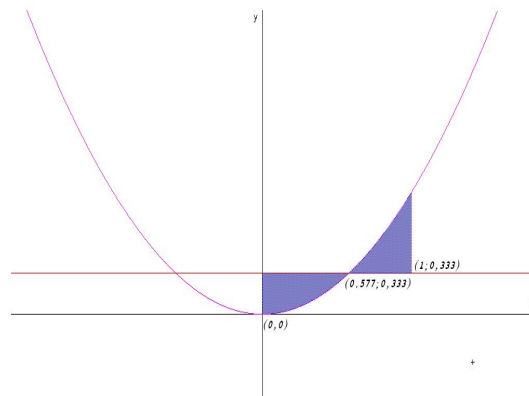
Problema 1.2.2 (2 puntos) Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Solución:

Calculamos la abscisa del punto de corte de ambas gráficas en función del parámetro a :

$$x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a}$$

Elegimos la solución positiva porque así nos lo indica el enunciado del problema. Tenemos, por tanto, que cuando $x = \sqrt{a}$ ambas curvas se cortan



$(x_0, y_0) = (\sqrt{a}, a)$ y la posición de las curvas cambia, de manera que, la que estaba por encima pasará a estar debajo. Es decir,

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx \implies$$

$$ax - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{x^3}{3} - ax \Big|_{\sqrt{a}}^1 \implies a = \frac{1}{3}$$

Problema 1.2.3 (3 puntos)

- (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P , Q y R .
- (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P , Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P , Q , R y S sea un paralelogramo.

Solución:

- Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por Q y R :

$$\begin{cases} \overrightarrow{QR} = (0, -2, -2) \\ Q(1, 2, 1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(-10, 0, 0)| = 10$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

b) Tenemos

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (0, -3, 2) \\ \overrightarrow{QR} = (0, -2, -2) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = 5 \text{ u}^2$$

c) El plano π que contiene a los puntos P , Q y R es el siguiente

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -3 & -2 & y \\ 2 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 10(x-1) = 0 \implies \pi : x-1 = 0$$

- Sean P , Q y R vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{QR} = (1, -1, 3) + (0, -2, -2) = (1, -3, 1)$
- Sean P , R y Q vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{RQ} = (1, -1, 3) + (0, 2, 2) = (1, 1, 5)$
- Sean Q , P y R vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{PR} = (1, 2, 1) + (0, 1, -4) = (1, 3, -3)$
- Sean Q , R y P vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{RP} = (1, 2, 1) + (0, -1, 4) = (1, 1, 5)$
- Sean R , P y Q vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{PQ} = (1, 0, -1) + (0, 3, -2) = (1, 3, -3)$
- Sean R , Q y P vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{QP} = (1, 0, -1) + (0, -3, 2) = (1, -3, 1)$

Los puntos S son $(1, -3, 1)$, $(1, 1, 5)$ y $(1, 3, -3)$. Todos ellos están contenidos en el plano π

Problema 1.2.4 (3 puntos)

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

Solución:

a) $|A| = (\lambda - 1)(3\lambda - 4) = 0 \implies \lambda = 1 \text{ y } \lambda = \frac{4}{3}.$

Si $\lambda = 1$, o $\lambda = \frac{4}{3} \implies$ No es invertible.

Si $\lambda \neq 1$, y $\lambda \neq \frac{4}{3} \implies$ Si es invertible.

b) Si $\lambda = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Con $\lambda = 1$ y $AX = O$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} y- & z=0 \\ - & y+ & z=0 \\ x+ & 2z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y- & z=0 \\ x+ & 2z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & -2t \\ y = & t \\ z = & t \end{cases}$$

1.3. Junio 2000 - Opción A

Problema 1.3.1 (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Solución:

Llamamos $\vec{x} = (a, b, c) \implies (a, b, c) \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b - c, a + 2c, a - 2b) = (1, 3, 5) \implies \begin{cases} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a - 2b = 5 \end{cases}$$

Como la primera ecuación es el resultados de restar a la tercera la segunda, sólo tendríamos dos ecuaciones, la tercera la obtenemos de $|\vec{x}| = \sqrt{6} \implies a^2 + b^2 + c^2 = 6$:

$$\begin{cases} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a = 5/3 \\ b = -5/3 \\ c = 2/3 \end{cases}$$

Es decir, $\vec{x} = (1, -2, 1)$ y $\vec{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Problema 1.3.2 (2 puntos)

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ -2c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \\ r = 5 \end{cases}$$

Esfera de centro $(1, -2, -4)$ y radio $r = 5$.

b) Al cortar la esfera con el plano $z = 0$ nos queda la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Circunferencia de centro $(1, -2, 0)$ y radio $r = 3$.

Problema 1.3.3 (3 puntos) Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2 .

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$\text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$\text{Traza}(AB) \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B)$$

Solución:

a) Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traza}(A) = a_1 + a_4, \quad \text{Traza}(B) = b_1 + b_4$$

$$\text{Traza}(A) + \text{Traza}(B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \text{Traza}(A + B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

Luego:

$$\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{Traza}(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 \\ \text{Traza}(BA) = a_1b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_4b_4 \end{cases} \implies \text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA)$$

c) Suponemos que la igualdad es cierta, es decir:

$$AB - BA = I \implies AB = BA + I \implies \text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA + I) \implies$$

$$\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA) + \text{Traza}(I), \text{ como } \text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA)$$

$$\implies 0 = 2$$

Luego esta igualdad es falsa.

d) Sea A una matriz cualquiera y $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \implies \text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(A) = 4, \quad \text{Traza}(B) = 2$$

$$\text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\text{Luego } \text{Traza}(A \cdot B) \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B)$$

Problema 1.3.4 (3 puntos) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a , b , c y d .

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Solución:

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \implies a + b + c + d = 0 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \implies 12a + 4b + c = 0 \\ f'(0) = 2 \implies c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{cases}$$

La función será:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

b) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2x - 3 \implies \begin{cases} f''(1) = -3 < 0 \implies \text{Máximo} \\ f''(2) = 1 > 0 \implies \text{Mínimo} \end{cases}$$

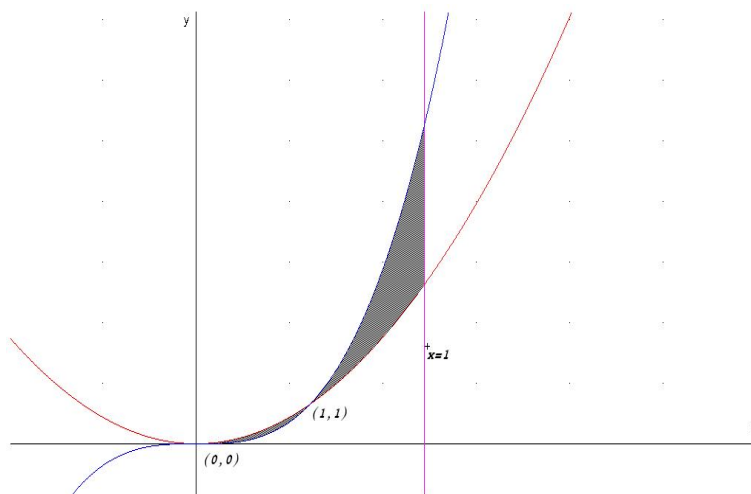
1.4. Junio 2000 - Opción B

Problema 1.4.1 (2 puntos) Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Solución:



Buscamos los puntos de corte de ambas funciones

$$x^2 = x^3 \implies x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x - 1) = 0 \implies x = 0, \quad x = 1$$

Los intervalos de integración serán $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^2 - x^3) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{17}{12}$$

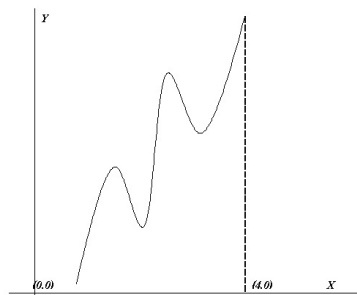
$$S = \left| \frac{1}{12} \right| + \left| -\frac{17}{12} \right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} u^2$$

Problema 1.4.2 (2 puntos)

- (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.
- (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Solución:

- El dibujo sería el siguiente:



- b) La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. Si fuese cuatro, la primera derivada tendría como mucho tres soluciones al igualar a cero.

Problema 1.4.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

- a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a .
 b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.
 c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right), \quad |A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \implies a = 1, \quad a = -2$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD}$.
- Si $a = 1$: (Homogéneo)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{SCI}$$

- Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{SCI}$$

Para cualquier valor de a el sistema es, por tanto, compatible.

- b) Si $a = 1$ se trata de tres planos coincidentes, $x + y + z = 0$.

Si $a = -2$ se cortan en una recta que calculamos en el siguiente apartado.

- c)

$$\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 0 \\ x+ & y+ & -2z = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x- & 2y = & -z \\ x+ & y = & 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.4.4 (3 puntos) Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π , perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

- a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π .
- b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π .
- c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

Solución:

- a) Se trata de un plano mediador. Calculamos punto medio del segmento $\overline{PQ}$ que será $M(2, 1, 0)$ y el vector $\overline{PQ} = (-12, -24, -16) = -4(3, 6, 4)$.

$$3x + 6y + 4z + \lambda = 0, \quad 6 + 6 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = -12$$

$$\pi : 3x + 6y + 4z - 12 = 0$$

- b) Calculamos una recta r perpendicular a π que pase por O y después calculamos el corte de esa recta r y el plano π .

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 6, 4) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

$$3(3\lambda) + 6(6\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0 \implies \lambda = \frac{12}{61}$$

El punto proyectado es: $O' \left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61} \right)$

c) Los puntos de corte son:

Con el eje OX : hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies A(4, 0, 0)$.

Con el eje OY : hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 2, 0)$.

Con el eje OZ : hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies C(0, 0, 3)$.

Los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0).$$

$$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0).$$

$$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3).$$

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = 4 u^3$$

1.5. Septiembre 2000 - Opción A

Problema 1.5.1 (2 puntos) Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

- a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
- b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales y Horizontales no hay claramente.
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin 2x) \text{ No existe}$$

Luego tampoco hay asíntotas oblicuas.

- b) $f'(x) = 2 + 2 \cos 2x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ Para cualquier x que escojamos $f'(x) > 0$, excepto en los puntos que la anulan, luego la

función es siempre creciente y no hay ni máximos ni mínimos. Veamos los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -4 \sin 2x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f'''(x) = -8 \cos 2x \implies f'''(\pi/2) = 8 \neq 0$$

Luego los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión.

Problema 1.5.2 (2 puntos) Dados tres números reales cualesquiera r_1 , r_2 y r_3 , hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x) = 0 \implies x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

x es la media aritmética de los tres números.

$$D''(x) = 6 \implies D''\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Problema 1.5.3 (3 puntos) Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{cases}$$

- (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ .
- (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.
- (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad |A| = \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 0, \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango} \overline{A} = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible determinado (solución única).

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Como la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1 , y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Como la primera fila es igual a la segunda, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Si $\lambda = 0$

$$\begin{cases} y+ & z = 1 \\ -x+ & y+ & z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 1-t \\ z = & t \end{cases}$$

- c) Si $\lambda = 3$

$$\begin{cases} y+ & z = 1 \\ 2x+ & y+ & z = 3 \\ x+ & 2y- & z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.5.4 (3 puntos) Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

- (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.
- (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY .
- (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX .

Solución:

- $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0 \implies$ centro $C(3, 3, 4)$ y radio $r = 5$

b)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 1, 0) \\ P_t(3, 3, 4) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

c) Imponemos $z = 0 \implies x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ circunferencia de centro $(3, 3, 0)$ y radio $r = 3$

d) Si cortamos la esfera con el eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies$

$$(x - 3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 25 \implies x = 3 \implies P(3, 0, 0)$$

El vector característico del plano tangente puede ser $\overrightarrow{PC} = (0, 3, 4)$

$$\pi : 3y + 4z + \lambda = 0$$

Como tiene que contener al punto $P \implies \lambda = 0$. Luego el plano buscado es $\pi : 3y + 4z = 0$.

1.6. Septiembre 2000 - Opción B

Problema 1.6.1 (2 puntos) Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a - 2)$ y $C(1, -1, a)$.

- a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a .
- b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a - 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Luego no están alineados.

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, a - 2) - (1, a, 0) = (0, 1 - a, a - 2) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -1, a) - (1, a, 0) = (0, -1 - a, a) \end{cases} \implies$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 - a & a - 2 \\ 0 & -1 - a & a \end{vmatrix} \right| = |(-2, 0, 0)| = 2$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 1 \, u^2$$

Problema 1.6.2 (2 puntos) Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

- a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.
- b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

- a) Deben ser $\vec{u}_r = \vec{u}_\pi$ o proporcionales:

$$(m, 4, 2)\lambda = (2, -1, k) \implies \lambda = -\frac{1}{4}, \quad m = -8, \quad k = -\frac{1}{2}$$

- b) El producto escalar de ambos vectores debe ser igual a cero:

$$2m - 4 + 2k = 0 \implies m + k = 2$$

Todos aquellos valores de m y k que cumplan $m + k = 2$ harán que la recta r esté contenida en el plano π .

Problema 1.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

- a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.
- c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f , el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

- a) Los puntos de corte son:

Con el eje OX : hacemos $f(x) = 0 \implies (-1, 0), (0, 0), (2, 0)$ y $(3, 0)$.

Con el eje OY : hacemos $x = 0 \implies (0, 0)$

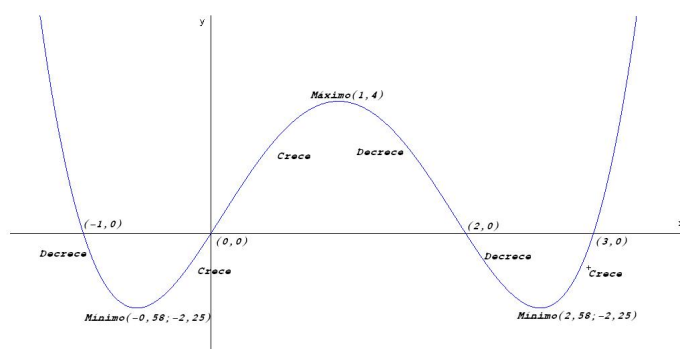
Estudiamos su monotonía:

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \implies x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x = 1$$

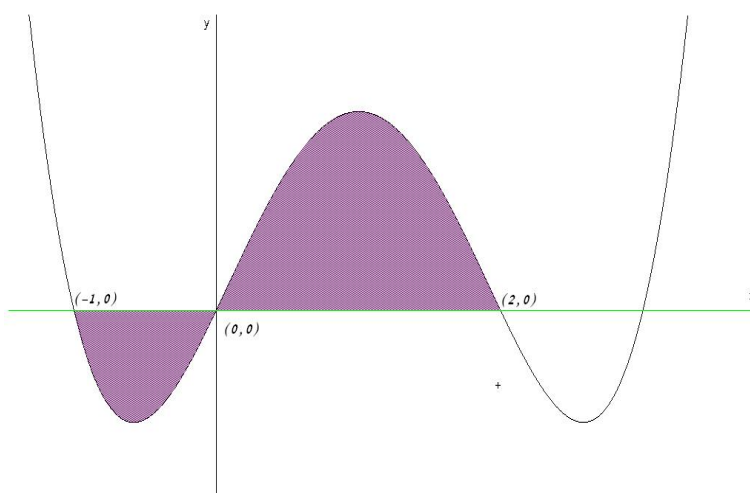
	$\left(\infty, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$f'(x)$	—	+	—
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(-0,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo, en el punto $(1,4)$ la función tiene un máximo y en el punto $(2,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo.

b) Representación gráfica



c) Hay un punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(-1, 2)$ ese punto es el $(0, 0)$. Luego tendremos que hacer dos integrales, una entre -1 y 0 , y otra entre 0 y 2 .



$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{22}{15}$$

$$S_2 = \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 = \frac{76}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} = \frac{98}{15} u^2$$

Problema 1.6.4 (3 puntos)

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & & z = & 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{cases}$$

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2k - 12 = 0 \implies k = -6$$

Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, es siempre compatible.

- Si $k \neq -6 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado}$. Como la solución es única, sólo tiene la trivial: $x = y = z = 0$
- Si $k = -6$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{SCI}$$

El sistema en este caso es Compatible Indeterminado, si escogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, vemos que el $\text{Rango}(A) = 2$ y, además podemos eliminar la segunda fila, para la solución del sistema, y nos queda:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ x- & y+ & & z = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x+ & y = & -5\lambda \\ x- & y = & -\lambda \\ & z = & \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x = & -3\lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$$

b) Ahora tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array} \right) \text{ y que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18\lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 4 \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)
- Si $\lambda = 0$ se trata de un sistema homogéneo. Tenemos que $\text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{Sistema Compatible Determinado}$$

La única solución en este caso es la solución trivial: $x = y = z = 0$

Capítulo 2

Año 2001

2.1. Modelo 2001 - Opción A

Problema 2.1.1 (2 puntos) Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 1-b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 \\ |A| &= \begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ F_2 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \\ F_4 - F_1 \end{vmatrix} = \\ & ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \\ F_4 - F_3 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = \\ & = -a^2 b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2 b^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 b^2 \end{aligned}$$

Problema 2.1.2 (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(B + X) = C \implies X = A^{-1}C - B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.3 (3 puntos) Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b , (a_1, b) , $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

- a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v .
- b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.
- c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Solución:

- a) u tangente en el punto $P(a, a^2/4)$ y v tangente en el punto $Q(b, b^2/4)$.
Tenemos $f'(x) = \frac{1}{2}x$:

$$m_1 : f'(a) = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = f'(b) = \frac{1}{2}b$$

$$\begin{cases} u : y - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}a(x - a) \\ u : y - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}b(x - b) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{ab}{4} \end{cases} \implies R\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{4}\right)$$

b)

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \implies ab = -4$$

- c) Se trata de una parábola vertical cuya directriz es la recta $d : y = -1$.
Si $ab = -4 \implies R\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-4}{4}\right) = R\left(\frac{a+b}{2}, -1\right) \in d$

Problema 2.1.4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

- (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.
- (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Sus asíntotas:

■ Verticales:

En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

En $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

■ Horizontales:

En $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

■ Oblicuas: No hay al haber horizontales.

b)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$$

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no hay puntos de inflexión, y además $2(3x^2 + 4) > 0$ siempre. Por otro lado, por el denominador:

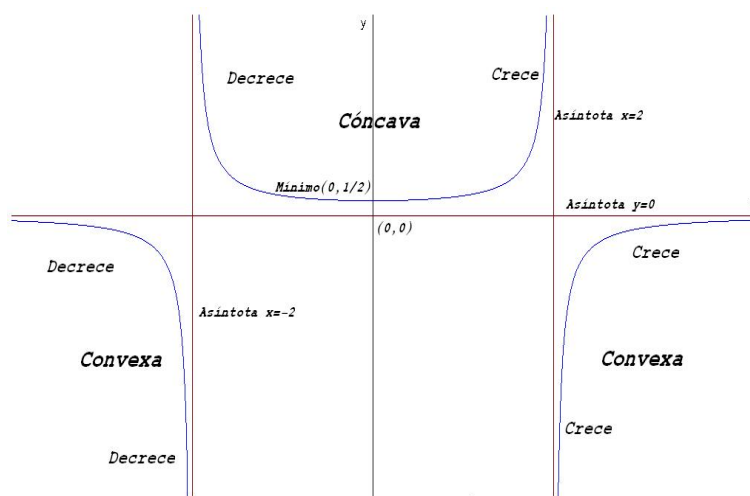
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	—	+	—
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

c)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Luego en el punto $(0, 1/4)$ la función presenta un mínimo.



2.2. Modelo 2001 - Opción B

Problema 2.2.1 (2 puntos) Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

- Calcular el área del triángulo en función de x e y .
- Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x+2, y+1, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (9, 6, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x+2 & y+1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} |(0, 0, 6x - 9y + 3)| = \frac{3}{2} (2x - 3y + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\frac{3}{2}(2x - 3y + 1) = 36 \implies 2x - 3y - 23 = 0$$

Problema 2.2.2 (2 puntos) Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

- a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.
- b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

Solución:

- a) Los centros de las circunferencias están en la mediatriz que une los dos puntos, es decir, la recta $x = 0$. Luego el centro de ellas es de la forma $C(0, a)$ y el radio $r = d(C, A) = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$. La ecuación de una circunferencia con este centro y este radio es:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 2a + 2 \implies x^2 + y^2 - 2ay + 2a - 2 = 0$$

- b) Si la recta $y = x$ es tangente a la circunferencia y el punto de tangencia tiene que ser $A(1, 1)$, necesariamente.

Una recta perpendicular a $y = x$ tiene de pendiente $m = -1$.

Construimos una recta con esta pendiente que pase por A :

$$y - 1 = -(x - 1) \implies x + y - 2 = 0$$

Esta recta corta a $x = 0$ en el punto $(0, 2)$, que será el centro de la circunferencia. Y el radio $r = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{2}$. Luego la circunferencia buscada es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 2 \implies x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$$

Problema 2.2.3 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y+ & kz = 9 \\ x- & y- & 6z = 5 \end{cases}$$

- b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$ y $\vec{C}_4$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array} \right), \quad |A| = 2k + 16 = 0 \implies k = -8$$

- Si $\lambda \neq -8 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -8$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A| = 0, \quad |A_2| = 0, \quad |A_3| = 0, \quad |A_4| = 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Podemos tachar la tercera ecuación y nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 8z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -1 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)

$$\vec{F}_3 + a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 = (0, 0, 0, 0) \implies a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\vec{F}_1 - \frac{2}{3}\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{O}$$

$$4\vec{C}_1 - \vec{C}_2 + 0\vec{C}_3 - \vec{C}_4 = \vec{O}$$

Problema 2.2.4 (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} &= - \int_{-10}^{-1} (1-e^x)^{-1/2} e^x dx = \\ &= -2\sqrt{1-e^x} \Big|_{-10}^{-1} = 0,4098344043 \end{aligned}$$

b) $t = 1 - e^x \implies dt = -e^x dx = (t-1)dx \implies dx = \frac{dt}{t-1}$

$$\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = -\ln|t| + \ln|t-1| = \ln \frac{e^x}{1-e^x} + C$$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)}$$

$$\begin{cases} t=1 \implies B=1 \\ t=0 \implies A=-1 \end{cases}$$

2.3. Junio 2001 - Opción A

Problema 2.3.1 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a .

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array} \right), \quad |A| = -3a + 24 = 0 \implies a = 8$$

■ Si $a \neq 8 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD}$.

■ Si $a = 8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2. \text{ Estudiamos el } \text{Rango}(\overline{A}):$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{array} \right| = 0, \quad |A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \end{array} \right| = 0$$

Luego $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI}$. El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 8$ por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 - 2z \\ 2x - y = 2 - 3z \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 4/3 - 5/3\lambda \\ y = 2/3 - 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2.3.2 (2 puntos) Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcular A^k .

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$.

Solución:

a)

$$A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^k X = BC \implies X = (A^k)^{-1} BC$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.3.3 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P .
- (1 punto) Hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r .
- (1 punto) Hallar el punto P'' , simétrico de P respecto de π .

Solución:

- a) Hallamos un plano perpendicular a r que contenga a P

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_{\pi_1} = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \implies y + z + \lambda = 0 \implies 1 + \lambda = 0$$

Como $\lambda = -1 \implies \pi_1 : y + z - 1 = 0$.

Ahora encontramos el punto de corte de este plano π_1 con la recta r :

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \lambda + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La recta que buscamos pasa por P y por Q :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{PQ} = (0, 1/2, -1/2) \\ P_s = P(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1/2t \\ z = -1/2t \end{cases}$$

- b) El simétrico de P respecto de r será el simétrico de P respecto del punto Q hallado en el apartado anterior:

$$Q = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2Q - P = (1, 0, 1)$$

- c) Primero hallamos la ecuación de la recta t perpendicular a π que pasa por P :

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto de corte de esta recta t con el plano π :

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

El punto de corte será $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Este punto R es el punto medio entre P y su simétrico P' :

$$R = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2R - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 2.3.4 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \sin x$

- (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f , el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.
- (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$
- (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Solución:

a)

$$\int_0^a \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^a = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \implies a = \frac{\pi}{3}$$

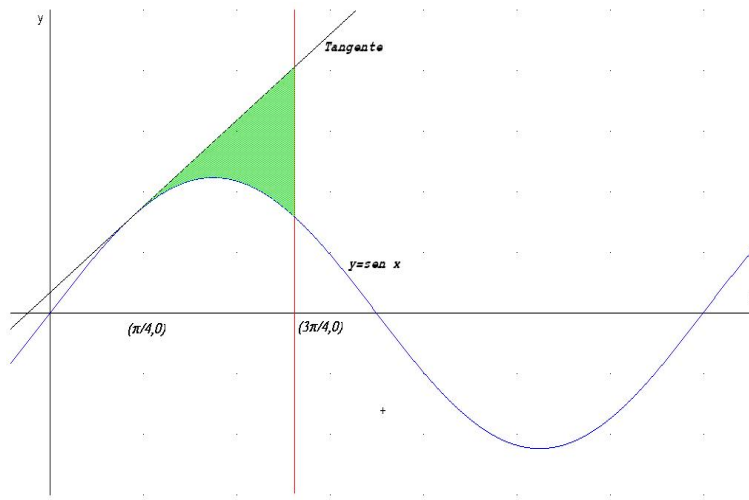
b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \implies m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



c) Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int \left[\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} + 1\right) \right] dx = -\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{4} + x\right)$$

$$S = \left| F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2 + 4\pi - 16)$$

2.4. Junio 2001 - Opción B

Problema 2.4.1 (2 puntos) Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
- b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
- c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

- a) Las dos ramas son continuas, el único punto en el que puede haber discontinuidad es en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x)^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Como además $f(1) = 1$, podemos concluir que f es continua en R .

- b)

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \implies f$ no es derivable en $x = 1$.

- c)

$$S_1 = \int_0^1 (8 - (2-x)^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = \frac{17}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (8 - x^2) dx = \left[8x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{17}{4} + \frac{17}{3} = \frac{119}{12} u^2$$

Problema 2.4.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica
- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Solución:

- a)

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \implies f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$$

$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies \text{Mínimo}$$

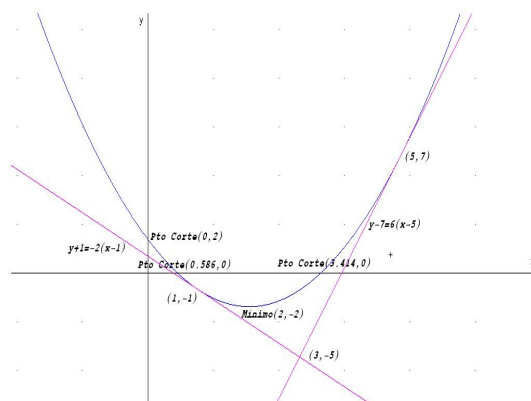
Luego tiene un mínimo en el punto $(2, -2)$

Se trata de una parábola vertical con vértice en el punto $(2, -2)$. Para dibujarla tan sólo será necesario encontrar los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX : hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Corte con el eje OY : hacemos $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

Los puntos serán: $(0, 2)$, $(2 - \sqrt{2}, 0)$ y $(2 + \sqrt{2}, 0)$.



b) La ecuación de una recta que pase por $(3, -5)$ es

$$y + 5 = m(x - 3), \text{ y } f'(x) = 2x - 4$$

Si el punto de tangencia con la gráfica es (a, b) tenemos

$$b + 5 = m(a - 3), \quad m = f'(a) = 2a - 4 \quad \text{y} \quad b = a^2 - 4a + 2$$

$$b + 5 = (2a - 4)(a - 3) \quad \text{y} \quad b = a^2 - 4a + 2 \Rightarrow a = 1, \quad a = 5$$

Los puntos de tangencia son: $(1, -1)$ y $(5, 7)$. Ahora calculamos las rectas tangentes en estos puntos

- En $(1, -1)$ la pendiente vale $m = -2$: $y + 1 = -2(x - 1)$
- En $(5, 7)$ la pendiente vale $m = 6$: $y - 7 = 6(x - 5)$

Problema 2.4.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ .
- b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.
- c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |\overline{A}| = (3+\lambda)(\lambda-1)^3 = 0 \implies \lambda = 1, \lambda = -3$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 4 \neq \text{Rango}(A) \implies \text{SI.}$
- Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{Rango}(A) = n^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD.}$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \right)$$

Tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 1 = \text{Rango}(A) < n^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI.}$

- b) Si $\lambda = -3$ quitamos la cuarta ecuación y nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & -3 \\ x+ & y+ & -3z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- c) Si $\lambda = 1$ tenemos que suprimir tres ecuaciones y nos queda $x + y + z = -3$, se trata de un plano, en forma paramétrica será:

$$\begin{cases} x = & -3- & \lambda & -\mu \\ y = & & \lambda & \\ z = & & & \mu \end{cases}$$

Problema 2.4.4 (3 puntos) Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
- b) (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- c) (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, k, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies k = -1$$

Si $k = -1$ las dos rectas son coplanarias.

b)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x - 1 \\ -1 & -1 & y - 2 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x + y - 3 = 0$$

c) Calculamos el punto de corte

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \implies \lambda = -\frac{3}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

El vector director de la recta es

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(1, 1, 0)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ P_r(5/4, 7/4, 1/2) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/4 + \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = 1/2 \end{cases}$$

2.5. Septiembre 2001 - Opción A

Problema 2.5.1 (2 puntos) Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Solución:

Llamamos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $P(x, y)$:

$$|\vec{OP}| = |\vec{AP}| \implies x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$$

Se trata de una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = 2$. Luego el área será: $S = \pi r^2 = 4\pi u^2$.

Problema 2.5.2 (2 puntos) Sean A , B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\vec{CB} = -3\vec{CA}$$

- (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\vec{AC} = k\vec{AB}$
- (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

- Como $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ y $\vec{BC} = 3\vec{CA} = -3\vec{AC}$ tenemos

$$\vec{AC} = \vec{AB} - 3\vec{AC} \implies 4\vec{AC} = \vec{AB} \implies k = \frac{1}{4}$$

- Volvemos a utilizar la propiedad triangular, para ello cogemos como punto auxiliar el $O(0, 0, 0)$ y el resultado del apartado anterior:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Luego } C\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

Problema 2.5.3 (3 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

- (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.
- (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.
- (1 punto) Para los mismos valores de a y b , hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Solución:

- Se tiene que cumplir que $f(2) = g(2)$ y que $f'(2) = g'(2)$:

$$f(2) = 3 = 4a + b$$

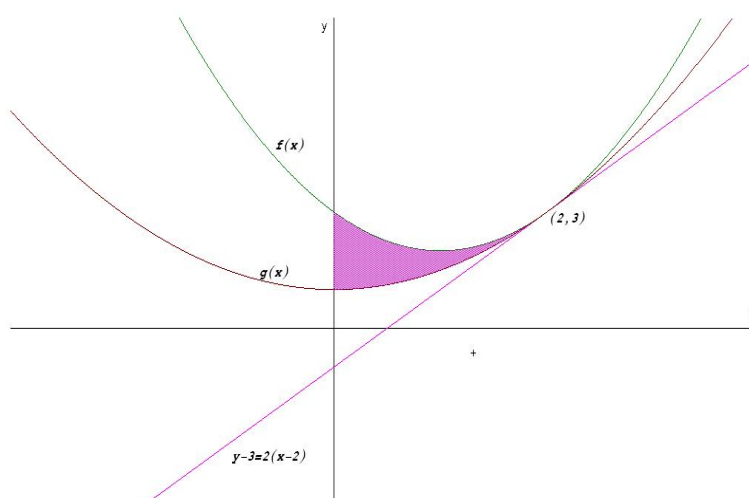
$$f'(x) = 2x - 2 \implies f'(2) = 2, \quad g'(x) = 2ax \implies g'(2) = 4a$$

luego $4a = 2 \implies a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. Con lo que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

- En ambas funciones la pendiente en $x = 2$ vale $m = f'(2) = 2$ y el punto de tangencia común a ambas funciones es $(2, 3)$. La recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 2)$$



c) El área buscada sería:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

Problema 2.5.4 (3 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right), \quad |A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \implies a = 1, \quad a = -3$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como la segunda columna y la cuarta son iguales $\text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 < \text{pero el menor}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(\bar{A}) = 3.$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible. (No tiene solución).

b) Para $a = 2$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{13}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{7}{5} \end{cases}$$

c) Para $a = 1$

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2.6. Septiembre 2001 - Opción B

Problema 2.6.1 (2 puntos) Sean la función $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Solución:

a) Hacemos el cambio de variable $1+e^t = x \implies e^t = x-1$ y $dt = \frac{1}{x-1}dx$

$$\int \frac{1}{1+e^t} dt = \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C = t - \ln |1+e^t| + C$$

La descomposición polinómica sería:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \implies 1 = A(x-1) + Bx$$

$$\begin{cases} x = 0 \implies A = -1 \\ x = 1 \implies B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para la resolución del límite. Para derivar $g(x)$ aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + e^x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^x} = 1$$

Problema 2.6.2 (2 puntos) Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.
- b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

Solución:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- $P(x)$ es una función par $P(-x) = P(x)$:

$$a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \implies bx^3 + dx = 0$$

$$\text{Luego } P(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$:

$$\begin{cases} x = 1 \implies P(1) = 0 \implies a + c + 5 = 0 \\ x = \sqrt{5} \implies P(\sqrt{5}) = 0 \implies 5a + c + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ c = -6 \end{cases}$$

- $P(0) = 5 \implies e = 5$

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

- a) Tenemos: $P'(x) = 4x^3 - 12x$, $P''(x) = 12x^2 - 12$ y $P'''(x) = 24x$. Para obtener los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

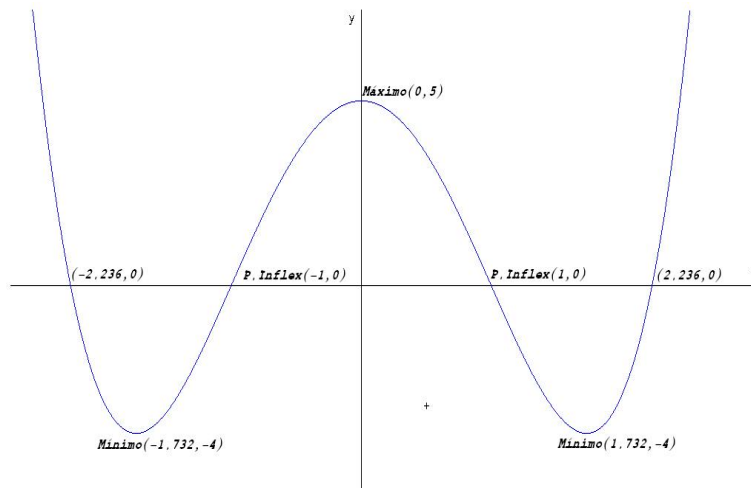
$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 1$$

Sustituimos en la tercera derivada:

$$\begin{cases} P'''(1) = 24 \neq 0 \\ P'''(-1) = -24 \neq 0 \end{cases}$$

Luego esta función tiene dos puntos de inflexión en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

- b) La gráfica será la siguiente:



Calculamos sus máximos y mínimos:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}, \quad x = 0$$

Por la segunda derivada

$$\begin{cases} P''(0) = -12 < 0 \\ P''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \\ P''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \end{cases}$$

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 5)$ y dos Mínimos en los puntos $(-\sqrt{3}, -4)$ y $(\sqrt{3}, -4)$.

Ahora calculamos puntos de corte:

Con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y tenemos $(0, 5)$.

Con el eje OX : Hacemos $P(x) = 0$ y tenemos $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

Problema 2.6.3 (3 puntos) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

- (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.
- (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A , B y C .
- (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD .

Solución:

- a) Tenemos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-1, -3, 3)| = \frac{\sqrt{19}}{2} u^2$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |7| = \frac{7}{6} u^3$$

- b) Construimos el plano π : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ A(1, 0, 0) \end{cases}$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|0 + 3 - 9 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19} u$$

- c) Calculamos las rectas r y s :

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-1, 0, 2) \\ B(1, 1, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$$

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BD}]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = 7$$

$$|\vec{AC} \times \vec{BD}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(2, 6, 1)| = \sqrt{41}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BD}]|}{|\vec{AC} \times \vec{BD}|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41} u$$

Problema 2.6.4 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

- (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
- (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1} .
- (1 punto) Calcular A^{100} .

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^3 + I = -I + I = O.$$

$$\text{b) } A^3 + I = O \implies A \cdot A^2 = -I \implies A \cdot (-A^2) = I \implies A^{-1} = -A^2$$

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) Tenemos } A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = -I, \quad A^4 = -A,$$

$$A^5 = -A^2, \quad A^6 = I, \dots \text{ Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego } A^{100} = A^4 = -A.$$

Capítulo 3

Año 2002

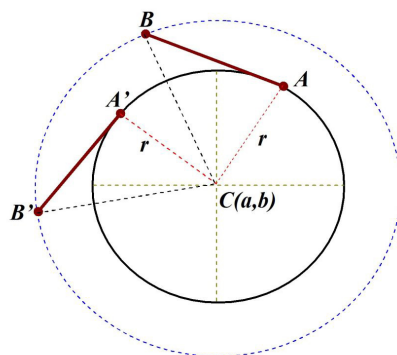
3.1. Modelo 2002 - Opción A

Problema 3.1.1 (2 puntos) Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

- a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.
- b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Solución:

- a) Veamos un dibujo aproximado:



Como se puede ver en la figura el segmento $\overline{CA} = \overline{CA'} = r$ radio de la circunferencia descrita por el punto A . El segmento $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ya que la varilla suponemos que siempre es del mismo tamaño. El ángulo $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'} = 90^\circ$. Luego los triángulos formados por los puntos ABC y $A'B'C$ son iguales y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CB'}$. En conclusión, el

punto B recorre una circunferencia de centro C y radio $R = \overline{CB}$, que sería concéntrica con la dada en el problema.

- b) La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \implies C(2, 1), \quad r = 2$.

$$R = \sqrt{\overline{AB}^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

La circunferencia que buscamos es de centro $C(2, 1)$ y radio $R = \sqrt{5}$:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \implies x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Problema 3.1.2 (2 puntos) Sean las rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{a} = z$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a .
- b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ P_r(0, 0, -1/6) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, a, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, 1, 1/6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{a + 2}{3} = 0 \implies a = -2$$

Si $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies$ las dos rectas se cruzan.

Si $a = -2 \implies \vec{u}_r = \vec{u}_s = (2, -2, 1)$ y además el $\text{Rango}(A) = 2$,

ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego las rectas son paralelas.

- b) Cuando $a = -2$ hemos visto que las rectas son paralelas, luego

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{\sqrt{53}}{9}$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(4/3, 1/3, -2)| = \frac{\sqrt{53}}{3} u$$

$$|\vec{u}_s| = 3$$

Problema 3.1.3 (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

- a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I .
- b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$
- c) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k .

Solución:

- a) Aplicamos la propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$:

$$A^2 + 2A = I \implies (A + 2I)A = I \implies |A + 2I||A| = |I| = 1$$

Si $|A| = 0 \implies 0 = 1$, lo que es imposible y, por tanto, la matriz A no es singular ($|A| \neq 0$). Esto quiere decir que siempre tiene inversa:

$$A^2 + 2A = I \implies (A + 2I)A = I \implies A^{-1} = A + 2I$$

- b) $A^2 = I - 2A$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A - 2A^2 = A - 2I + 4A = -2I + 5A$$

Luego $p = -2$ y $q = 5$.

- c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix} \implies A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & (k+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies k = -2$$

Problema 3.1.4 (3 puntos) Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

- a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
- b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

Solución:

- a) La pendiente de la recta tangente en $x = r$ es $m = -2r$, y la ecuación de esta recta será:

$$y - (4 - r^2) = -2r(x - r) \implies 2rx + y - (4 + r^2) = 0$$

La base del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de abscisas, haciendo $y = 0 \implies x = \frac{4 + r^2}{2r}$

La altura del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \implies y = 4 + r^2$.

La función a minimizar será:

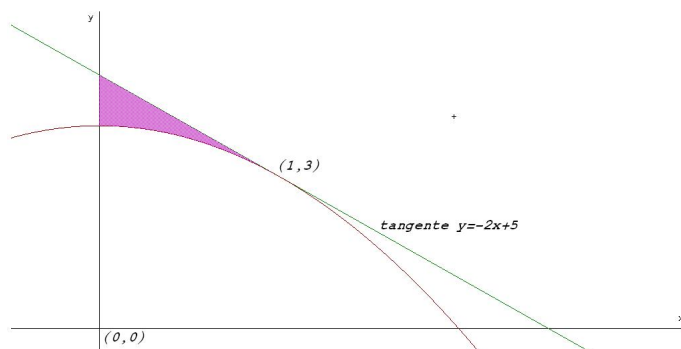
$$S(r) = \frac{\frac{4 + r^2}{2r}(4 + r^2)}{2} = \frac{(4 + r^2)^2}{4r}$$

$$S'(r) = \frac{(4 + r^2)(3r^2 - 4)}{4r^2} = 0 \implies r = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -2/\sqrt{3})$	$(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$	$(2/\sqrt{3}, \infty)$
$S'(r)$	+	-	+
$S(r)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego la función es mínima cuando $r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

- b) El recinto es el siguiente:



La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $2x + y - 5 = 0 \implies y = -2x + 5$. El área es el comprendido entre esta recta y la parábola en el intervalo de integración $[0, 1]$:

$$S = \left| \int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2)) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 + 1 \right| = \frac{1}{3} u^2$$

3.2. Modelo 2002 - Opción B

Problema 3.2.1 (3 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcular A^{-1} .
b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = BA \implies X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.2 (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

- a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.
b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferentes valores de O .

Solución:

a)

$$B = A - OI = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$
$$|B| = O^2 - 1 \implies O = \pm 1$$

b) Se trata de un sistema homogéneo

$$B = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior tenemos que:

Si $O \neq \pm 1 \implies |B| \neq 0 \implies$ Sistema Compatible Determinado (solución única). La solución es la trivial $x = y = 0$.

Si $O = \pm 1 \implies |B| = 0 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones):

■ Si $O = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{tenemos } x - 3y = 0 \implies \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

■ Si $O = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

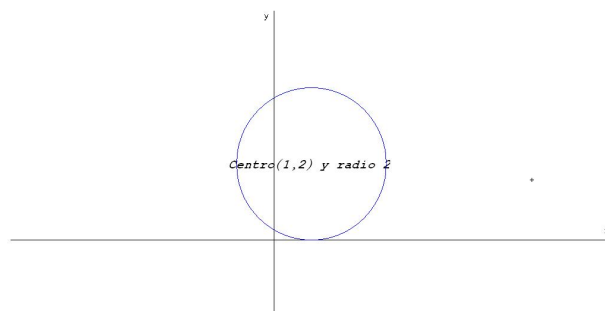
$$\text{tenemos } x - y = 0 \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Problema 3.2.3 (3 puntos) Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
- (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
- (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Solución:

- El centro es $C(1, 2)$ y el radio $r = 2$

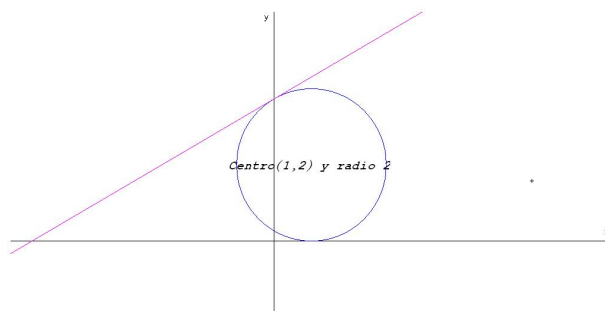


- b) Para encontrar el punto hacemos $x = 0 \implies y^2 - 4y + 1 = 0 \implies (0, 2 + \sqrt{3})$ y $(0, 2 - \sqrt{3})$. El punto más alejado es: $(0, 2 + \sqrt{3})$

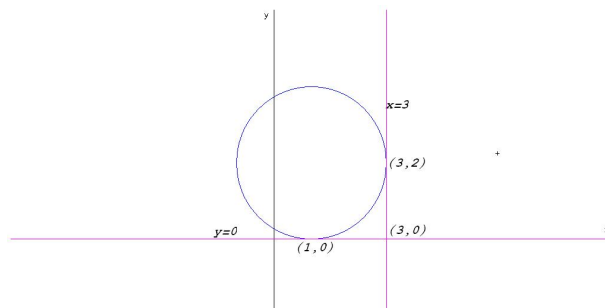
$$2xdx + 2ydy - 2dx - 4dy = 0 \implies (2y - 4)dy = -(2x - 2)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2}{2y - 4} \implies m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente es $y - 2 - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x \implies \sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$



- c) El dibujo es:



Una de ellas es el eje de abscisa $y = 0$ y tendrá de punto de tangencia

el $(2, 0)$, ya que el punto $(3, 0)$ está en el eje de abscisas. La otra recta tangente que pase por este punto debe de ser $x = 3$, ya que el punto de tangencia es el $(3, 2)$.

Problema 3.2.4 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

- a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f .
- b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p .

Solución:

a) Estudio:

■ Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

■ Signo:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

■ Simetría: No hay $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$

■ Puntos de corte:

- Si $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$
- Si $f(x) = 0 \implies x = 0 \implies (0, 0)$

■ Asíntotas:

- Verticales no hay
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{3x} = \infty$$

$$y = -x \implies \text{si } x \rightarrow -\infty \text{ entonces } y \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{3x} = \lim_{y \rightarrow \infty} ye^{-3y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-y}{e^{3y}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-1}{3e^{3y}} = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Oblicuas: No hay al haber horizontales.

■ Monotonía: $f'(x) = e^{3x}(3x + 1) = 0 \implies x = -\frac{1}{3}$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

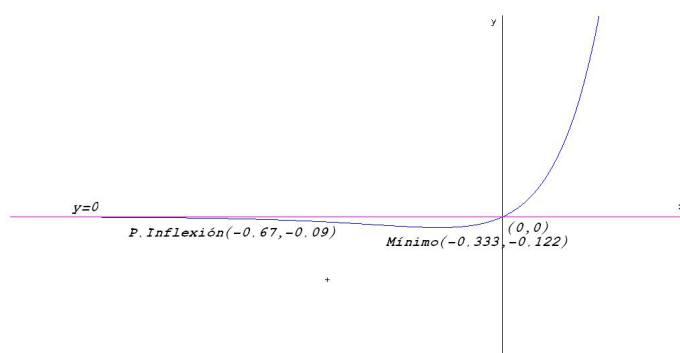
La función presenta un mínimo en el punto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3e}\right)$

- Curvatura: $f''(x) = 3e^{3x}(3x + 2) = 0 \implies x = -\frac{2}{3}$

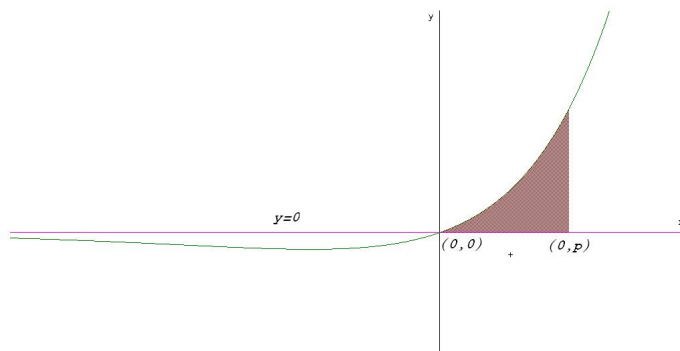
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función presenta un punto de inflexión en $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3e^2}\right)$

- Representación gráfica:



b) Veamos la figura:



La integral se calcula por partes $u = x \implies du = dx$ y $dv = e^{3x} dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x}$:

$$\int x e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{9} e^{3x} = e^{3x} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\int_0^p x e^{3x} dx = e^{3p} \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{1}{9} \right) = e^{3p} \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3p} \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) = 0 \implies \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \implies p = \frac{1}{3}$$

3.3. Junio 2002 - Opción A

Problema 3.3.1 (2 puntos) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:

Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\begin{cases} x - 14 = 5(y + z - 28) \\ x + 10 = y + z + 20 \\ x - 42 = y - z \end{cases} \implies \begin{cases} x - 5y - 5z + 126 = 0 \\ x - y - z - 10 = 0 \\ x - y + z - 42 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\begin{cases} x - 5y - 5z + 126 = 0 \\ -5x + 5y + 5z + 50 = 0 \end{cases} \implies -4x + 176 = 0 \implies x = 44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\begin{cases} y + z = 34 \\ y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 18 \\ z = 16 \end{cases}$$

Problema 3.3.2 (2 puntos) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:

$$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \implies a = -4 \quad a = 2$$

$$|A_2| = -8(a+4) = 0 \implies a = -4$$

$$|A_3| = 12a + 48 = 0 \implies a = -4$$

$$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \implies a = -4 \quad a = -\frac{2}{3} \text{ El único valor de } a \text{ que anu-}$$

la todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:

Si $a = -4$ el rango de A es 2

Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Problema 3.3.3 (3 puntos) Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

- (2 puntos) Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).
- (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Solución:

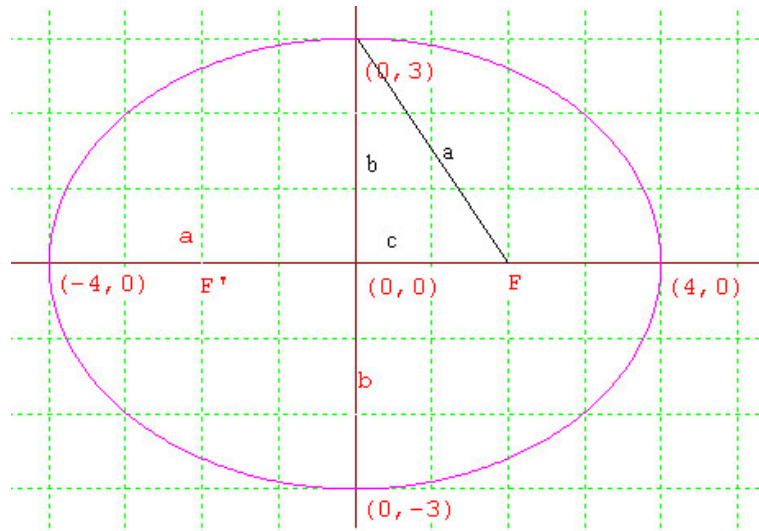
- $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.

Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.

Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$

Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$

Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

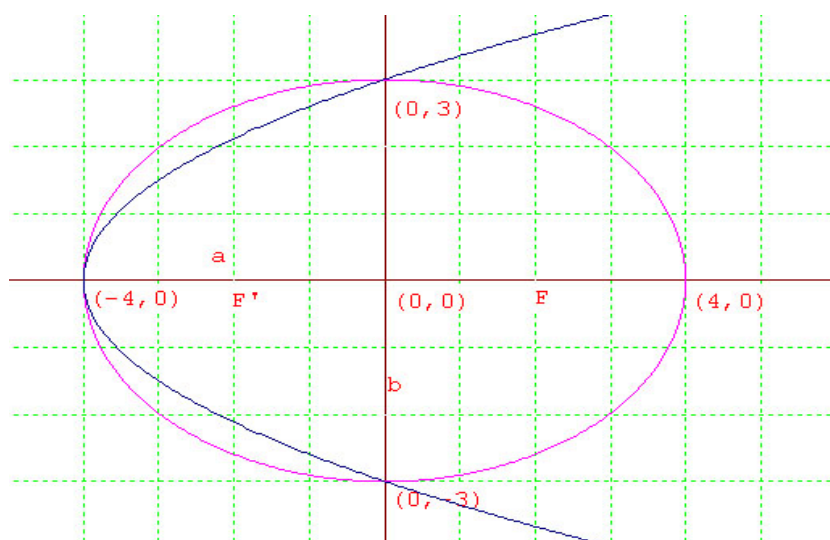
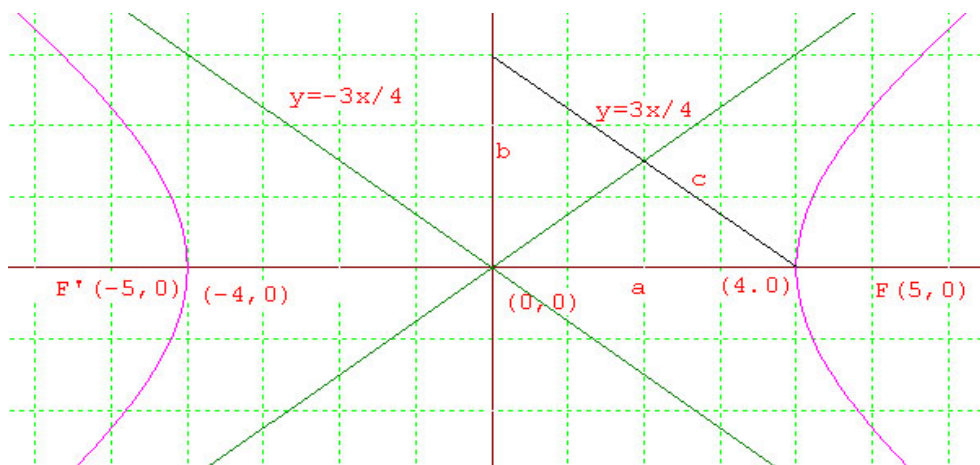
Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

b) La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:



$$\begin{cases} -4 = & c \\ 0 = & 9a + 3b + c \\ 0 = & 9a - 3b + c \end{cases} \Rightarrow c = -4, a = \frac{4}{9} \text{ y } b = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 3.3.4 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

- (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f .
- (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

- a) Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2 + 3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sustituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pendiente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$. En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \implies x + 8y - 3 = 0$$

- b) El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

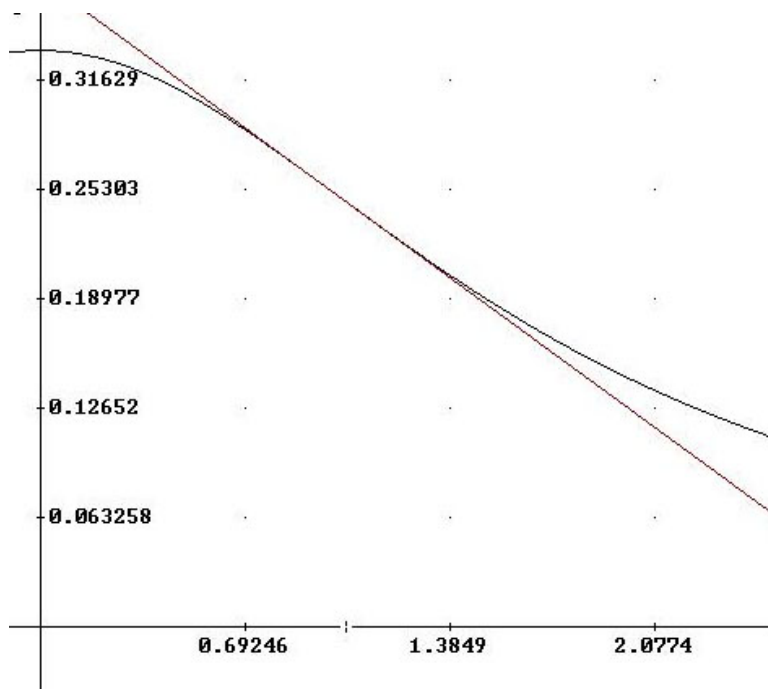
$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3} \right] dx$$

Calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+3} dx &= \int \frac{dx}{3 \left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t$ $dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3} \right] dx &= \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} \end{aligned}$$



3.4. Junio 2002 - Opción B

Problema 3.4.1 (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

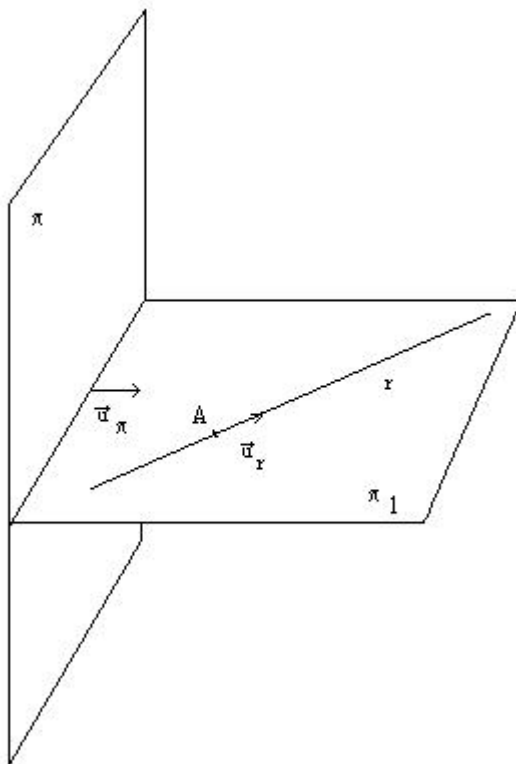
Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$



La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 3.4.2 (2 puntos) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

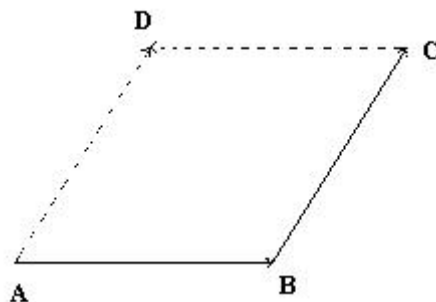
Se pide:

- (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
- (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

- Los vectores que nos proporciona el problema son: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.

Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \implies (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 =$



0, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}|$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \Rightarrow Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

- b) Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no será otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\vec{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 3.4.3 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

- a) Sean las matrices A y $\bar{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \implies a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas; el sistema sería compatible determinado.

Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies Rango(\bar{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

- b) Si $a = -1$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

- En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ El sistema es compatible indeterminado.
- c) Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

- d) Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \implies z = -\frac{1}{2} \implies \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ Es decir:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Problema 3.4.4 (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

a) Calculamos el dominio:

- Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único posible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:

La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supuesto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego f es continua en $x = -1$.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no es continua en $x = 0$.

- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

b) Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:

Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$: No hay asíntotas oblicuas en este intervalo por haber horizontales.

- c) El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$ (el eje de abscisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx &= \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2\end{aligned}$$

3.5. Septiembre 2002 - Opción A

Problema 3.5.1 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x) dx = 1$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $(-1, -1/2)$ tenemos un Mínimo y en el punto $(1, 1/2)$ tenemos un Máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right]_0^a = 1 \implies \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) = 1 \implies a = \sqrt{e^2 - 1}$$

Problema 3.5.2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Solución:

- a) Estudiamos en el punto $x = 2$:

Continuidad:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x-2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} x(x-2) = 0 \\ f(2) &= 0\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \implies f \text{ es continua en } x = 2$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si } x \geq 2 \\ 2x-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = 2, \quad f'(2^+) = \infty$$

Como

$$f'(2^-) \neq f'(2^+) \implies f \text{ no es derivable en } x = 2$$

- b) Es en la rama $x \geq 2$:

$$\begin{aligned}f(3) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} \implies m = f'(3) = \frac{1}{3} \\ y-1 &= \frac{1}{3}(x-3) \implies x-3y=0\end{aligned}$$

Problema 3.5.3 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

- c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 0 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ } \lambda = 1$$

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

b) Si $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

c) Si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y - z = 2 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Los tres planos se cortan dos a dos

Problema 3.5.4 (3 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

- a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s .
- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -2, 2) \\ P_r(0, 1, 3) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, -1) \\ P_s(2, 0, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (2, -1, -4)$$

$$|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \left| \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-35| = 35$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(0, 7, 7)| = 7\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{35}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

- b) La encontramos como intersección de dos planos y para ello nos apoyamos en el vector perpendicular a ambas rectas $\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (0, 7, 7)$:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 7, 7) \\ \vec{u}_r = (1, -2, 2) \\ P_r(0, 1, 3) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 7, 7) \\ \vec{u}_s = (3, 1, -1) \\ P_s(2, 0, -1) \end{cases} \quad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 7 & -2 & y-1 \\ 7 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + y - z = -2$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-2 \\ 7 & 1 & y \\ 7 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - 3y + 3z = 1$$

$$t : \begin{cases} 4x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

- c) La encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P_r} = (-1, 1, 3) \\ \vec{u}_r = (1, -2, 2) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P_s} = (1, 0, -1) \\ \vec{u}_s = (3, 1, -1) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \quad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 8x + 5y + z = 8$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 3 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 2y + z = 1$$

$$t : \begin{cases} 8x + 5y + z = 8 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

3.6. Septiembre 2002 - Opción B

Problema 3.6.1 (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Solución:

Sea $X(x, y)$ un punto genérico, tendremos:

$$d(A, X) = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}, \quad d(B, X) = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 1$$

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

Se trata por definición de una hipérbola.

Problema 3.6.2 (2 puntos) Para cada valor del parámetro real a , se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x+ & y+ & az = & -2 \\ x+ & ay+ & z = & -1 \\ ax+ & y+ & z = & 3 \end{cases} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\implies |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \implies a = -2, a = 1$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = -2$ el $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas con lo que el sistema es compatible indeterminado, los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Como además no son planos coincidentes, tienen por tanto, una recta común.

Si $a = 1$ tenemos que $\text{Rango}(\bar{A}) = 2 \neq \text{Rango}(A) = 1$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a = -2$

$$\begin{cases} x+ & y- & 2z = & -2 \\ x- & 2y+ & z = & -1 \\ -2x+ & y+ & z = & 3 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -5/3 + \lambda \\ y = -1/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3.6.3 (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n .

Se pide:

- (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A
- (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
- (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

- $A^2 = A \cdot A = I \implies A = A^{-1}$
- $A^1 = A, A^2 = I, A^3 = A, A^4 = I, \dots$ luego:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ es impar} \\ I & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow a=-1$$

Problema 3.6.4 (3 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Solución:

a)

$$g'(x) = f'(x + f(0))(x + f(0))' = f'(x+1)(1 + f'(0)) = f'(x+1)4$$

$$g'(0) = f'(0+1)4 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(f(x))f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = 8$$

Capítulo 4

Año 2003

4.1. Modelo 2003 - Opción A

Problema 4.1.1 (2 puntos) Determinar los valores de las constantes A , B , C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A \sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \implies D = 4$$

$$f'(x) = A \cos x + 2Bx + C \text{ como } f'(0) = 0 \implies A + C = 0$$

$$f''(x) = -A \sin x + 2B \implies A = -3, \quad B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3 \sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 4.1.2 (2 puntos) Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$5x - 2 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

Si $x = 2 \implies 8 = -B \implies B = -8$

Si $x = 3 \implies 13 = A \implies B = 13$. Luego:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} &= 1 + \frac{13}{x - 3} - \frac{8}{x - 2} \\ \int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int dx + 13 \int \frac{1}{x - 3} dx - 8 \int \frac{1}{x - 2} dx = \\ x + 13 \ln |x - 3| - 8 \ln |x - 2| &= x + \ln \frac{|x - 3|^{13}}{|x - 2|^8}\end{aligned}$$

Problema 4.1.3 (3 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

- a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I .
- b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
- c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}M^2 - 2M = 3I &\implies (M - 2)M = 3I \implies \frac{1}{3}(M - 2)M = I \implies \\ M^{-1} &= \frac{1}{3}(M - 2)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}M^2 &= 2M + 3I \implies M^3 = (2M + 3I)M = \\ 2M^2 + 3M &= 2M^2 + 3M = 2(2M + 3I) + 3M = 7M + 6I\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}M^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ 3I + 2M &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2a & 2b \\ 2b & 3 + 2a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2a & 2b \\ 2b & 3 + 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 + 2a \\ 2ab = 2b \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1, & b = \pm 2 \\ b = 0, & a = \pm 1 \\ b = 0, & a = 3 \end{cases}$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.1.4 (3 puntos) Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

- (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π .
- (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta r .

Solución:

- Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1, 1, 1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π :

$$(1 + \lambda + (1 + \lambda) - 2(1 - 2\lambda) = 6 \implies \lambda = 1$$

$$M'(2, 2, -1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'' :

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \implies M'' = 2M' - M = (4, 4, -2) - (1, 1, 1) = (3, 3, -3)$$

- Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M :

$$2x + 3y - z + \lambda = 0 \implies 2 + 3 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{14}$$

$$M' \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'' :

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \implies M'' = 2M' - M = 2 \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right) - (1, 1, 1) =$$

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

4.2. Modelo 2003 - Opción B

Problema 4.2.1 (3 puntos) Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a + c \implies c = 0 \\ c + d = d \implies c = 0 \\ a + b = b + d \implies a = d \end{cases}$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4.2.2 (2 puntos) Para cada valor del parámetro real k , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k .
- (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = -1 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1, \quad k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Rightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Rightarrow \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Rightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Si $k = 2$:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Problema 4.2.3 (3 puntos) Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1), \quad B(0, -2, 2) \quad C(-1, 0, 2) \quad D(2, -1, -2).$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
- (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A , B y C .

- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C .

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (1, -2, -3)$$

a)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} u^3$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \\ A(1, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$2x + y + 5z - 8 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|4 - 1 - 10 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{2} u$$

c)

$$r = \begin{cases} \overrightarrow{ur} = (2, 1, 5) \\ D(2, -1, -2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases}$$

Problema 4.2.4 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.
- c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
- d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}} \right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, \infty)$.

Luego en el punto $(-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4})$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} = 0$$

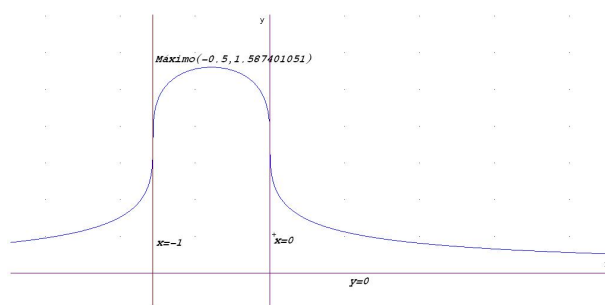
Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) dx = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} u^2$$

4.3. Junio 2003 - Opción A

Problema 4.3.1 (2 puntos) Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

a) (1 punto)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3 \sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x) \cos(2x)}{-2 \sin(2x) \cos(3x)} \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x) \cos(2x) - 2 \sin(3x) \sin(2x)}{2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

b) (1 punto)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x - (4-x)}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Problema 4.3.2 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

a) Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \implies x = 1, x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

b) Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 4.3.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m .

Solución:

a) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} 3x+ & z = 3 \\ x- & y+ & z = 2 \\ x+ & y- & z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ & mx- & y+ & z=2 \\ & x+ & my- & z=1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

$$-m(m+1) = 0 \implies \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = 0 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = -1 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = -1 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 4.3.4 (3 puntos) Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.
- b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3, -4, 1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

b)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{cases}$$

4.4. Junio 2003 - Opción B

Problema 4.4.1 (2 puntos) Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 4.4.2 (2 puntos) Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \lambda x + 3y = 3x + 9y \\ y = 3y \end{cases} \implies \begin{cases} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda z + 3h = 3z + 9h \\ h = 3h \end{cases} \implies \begin{cases} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.4.3 (3 puntos)

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$.

- c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

- a) El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R , calculamos los máximos y mínimos de esta función

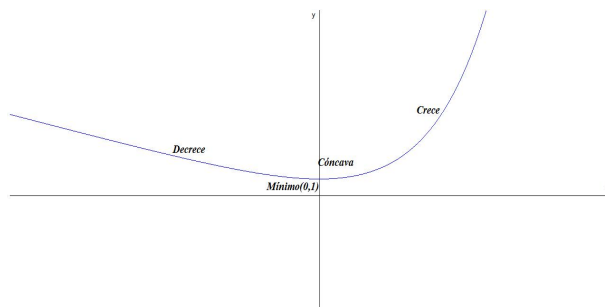
$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \implies e^x = 1 \implies x = 0$$

$$g''(x) = e^x \implies g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in R \implies$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\cup$.

Su gráfica sería:



- b)

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R .

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \rightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \rightarrow \infty$.

En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abscisas) es una asíntota horizontal.

c)

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \implies 1 - e^x = 0 \implies x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x - 4) + 2}{(e^x - x)^3} \implies f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.

Problema 4.4.4 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x + 2}{6} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{1}$$

- (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
- (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π' .

Solución:

a) Datos:

$$\pi : \vec{u}_\pi = (1, 3, -1) \quad r : \begin{cases} \vec{u}_r = (6, 2, 1) \\ P_r(-2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

b)

$$s : \begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + \frac{5}{2} \cdot \lambda \\ y = 1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

4.5. Septiembre 2003 - Opción A

Problema 4.5.1 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 2, 0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B .

Solución:

$$\vec{u}_\pi = (1, -2, -1)$$

$$\vec{AB} = (-1, 2, -1)$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + y - 2 = 0$$

Problema 4.5.2 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \begin{cases} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
- (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a)

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 3k = (-1, 2, 3)$$

Si en la recta s hacemos $x = 0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y = -2$ y $z = 1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0, -2, 1)$.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, k) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 3) \\ P_s(0, -2, 1) \end{cases}$$

El plano π que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, -1, k) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - 2y + z - 1 - k = 0 \implies x + 2y - z + 1 + k = 0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0, -2, 1)$ sustituimos en el plano

$$0 - 4 - 1 + 1 + k = 0 \implies k = 4$$

b) El plano buscado es:

$$x + 2y - z + 5 = 0$$

Problema 4.5.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1 = 0 \implies m = 1$$

Si $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango} A = \text{Rango} \bar{A} = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

b) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, $\text{Rango}\overline{A} = 2$.

En conclusión, si $m = 1$ $\text{Rango}(A) = \text{Rango}\overline{A} = 2 < n^\circ$ de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

Problema 4.5.4 (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

- (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.
- (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \implies 2 \cos x - 1 = 0 \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies$$

Luego $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = -\frac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.

Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2 \sin x (1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximos en los puntos $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

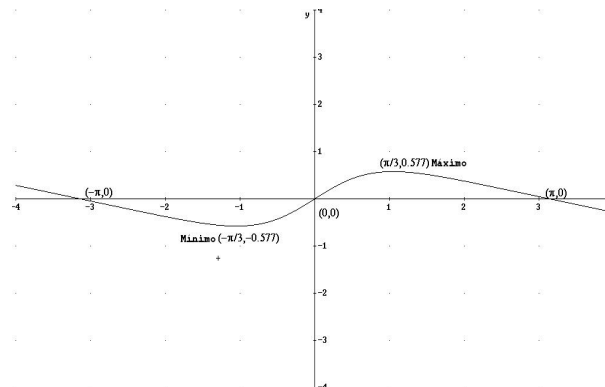
$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

- b) Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte: Si $x = 0$ tenemos que $f(0) = 0 \implies (0, 0)$. Si $f(x) = 0$ tenemos que $\frac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \implies \sin x = 0 \implies x = \pi, x = -\pi$. Luego tenemos los puntos $(\pi, 0)$ y $(-\pi, 0)$. Si tenemos en cuenta que la función es impar:



c) Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

$$t = 2 - \cos x \implies \sin x \, dx = dt$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |2 - \cos x| + C$$

Luego la integral pedida valdrá:

$$\int_0^{\pi/3} f(x) \, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \ln |2 - \cos x| \Big|_0^{\pi/3} = \ln \frac{3}{2}$$

Problema 4.5.5 (3 puntos) Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r .
- (2 puntos) Encontrar un plano π' , paralelo a π , tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$1 + t + 2t - 1 + 2t = 0 \implies t = 0 \implies Q(1, 0, -1)$$

- Calculamos una esfera de centro Q y radio 2: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$; esta esfera corta a la recta r en dos puntos Q' y Q'' :

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 4 \implies t = \pm \frac{2}{3}$$

Si $t = \frac{2}{3} \implies Q' \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π' :

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{8}{3} = 0$$

Si $t = -\frac{2}{3} \implies Q''\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π'' :

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{7}{3} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{10}{3} = 0$$

4.6. Septiembre 2003 - Opción B

Problema 4.6.1 (2 puntos) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A , 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.
- (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

a) x = precio de un billete con destino nacional.

y = precio de un billete con europeo comunitario.

z = precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\begin{cases} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + \quad \quad 20z = 13000 \\ 10x + 10y \quad \quad = 7000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + \quad \quad 2z = 1300 \\ x + y \quad \quad = 700 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = 300 \\ y = 400 \\ z = 500 \end{cases}$$

- b) Si el precio de los billetes nacionales bajan un 20 por ciento costarían $0,8 \cdot x = 240$ euros, por lo que hay que subir el precio de los billetes europeos comunitarios en $300 - 240 = 60$ euros, lo que significa que el nuevo precio sería de $400 + 60 = 460$ euros, lo que supone una subida de estos billetes del 15 por ciento. $(400(1+t) = 460 \implies t = 0,15)$

Problema 4.6.2 (2 puntos)

- a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

- b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

Solución:

a) $A+B=AB \implies A+B-AB=0 \implies A-AB=-B \implies$

$$A(I-B)=-B \implies -A(I-B)(I-B)^{-1}=B(I-B)^{-1} \implies$$

$$B(I-B)^{-1}=-A \implies B^{-1}B(I-B)^{-1}=-B^{-1}A \implies$$

$$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$$

- b) Llamamos $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}$, y tendremos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z & -y+h \\ 2x-z & 2y-h \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} x-1 = -x+z \\ 2+z = 2x-z \end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 1 = -y + h \\ -1 + h = 2y - h \end{cases} \implies \begin{cases} h = 0 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

Luego

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

- Estudiar su continuidad y su derivabilidad.
- Dibujar su gráfica.
- Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX .

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4 - x) & \text{si } 4 - x \geq 0 \\ -2x(4 - x) & \text{si } 4 - x < 0 \end{cases} \implies$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4 - x) & \text{si } x \leq 4 \\ -2x(4 - x) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (-2x(4 - x)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x(4 - x)) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Luego la función es continua en $x = 4$, y por tanto, en todo R .

$$f'(x) = \begin{cases} 8 - 4x & \text{si } x \leq 4 \\ -8 + 4x & \text{si } x > 4 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(4^-) = -8 \\ f'(4^+) = 8 \end{cases} \implies$$

$$f'(4^-) \neq f'(4^+)$$

Luego la función no es derivable en $x = 4$, pero si es derivable en $R - \{4\}$.

- Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

$$f(x) = 8x - 2x^2 \text{ si } x \in (-\infty, 4]$$

$$f'(x) = 8 - 4x = 0 \implies x = 2$$

$$f''(2) = -4 \implies (2, 8) \text{ es un máximo.}$$

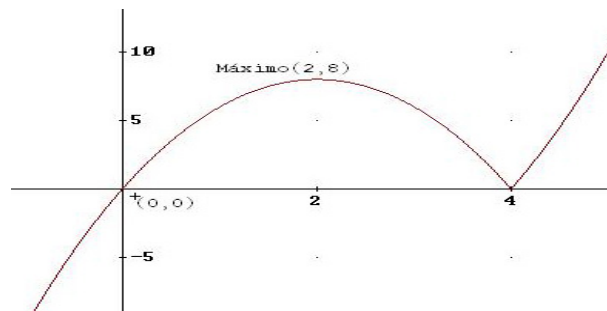
Si hacemos $f(x) = 0 \implies (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

$$f(x) = -8x + 2x^2 \text{ si } x \in (4, +\infty)$$

$$f'(x) = -8 + 4x = 0 \implies x = 2, \text{ que no está en el intervalo } (4, +\infty).$$

En este intervalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$.

Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



c) A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx = \\ &= \int_0^4 (8x - 2x^2)dx + \int_4^5 (-8x + 2x^2)dx = 26 u^2 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Año 2004

5.1. Modelo 2004 - Opción A

Problema 5.1.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^4}} dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{3n-1}{3n} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

b)

$$F'(x) = \sqrt{5 + e^{x^4}}, \quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = 2x\sqrt{5 + e^{x^8}}$$

Problema 5.1.2 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \rightarrow 1$.
- b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Solución:

a)

$$x^2 - x = 0 \implies x = 0, \quad x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{en } x = 0 \quad f(0) = a$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$$

- b) En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

Para que f sea continua en ese punto $a = -1$.

Problema 5.1.3 (3 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ , y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2\lambda z = 2 \\ \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 2\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = 2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8) = 0 \implies \lambda = 1, \quad \lambda = 8/3$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 8/3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución

única.

Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{268}{9} \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Problema 5.1.4 (3 puntos) Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad r'' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Se pide:

- Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r , r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).
- Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).
- Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Solución:

- a) Sea A el punto de corte de r con π :

$$1 + t + at + 1 = 0 \implies t = -\frac{2}{a+1} \implies A \left(1, -\frac{2}{a+1}, -\frac{2}{a+1} \right)$$

Sea A' el punto de corte de r' con π :

$$2 + 2t + at + 1 = 0 \implies t = -\frac{2}{a+2} \implies A' \left(2, -\frac{6}{a+2}, -\frac{3}{a+2} \right)$$

Sea A'' el punto de corte de r'' con π :

$$3 + 3t + at + 1 = 0 \implies t = -\frac{4}{a+3} \implies A'' \left(3, -\frac{12}{a+3}, -\frac{4}{a+3} \right)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \left(1, -\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+1)(a+2)} \right)$$

$$\overrightarrow{A'A''} = \left(1, -\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+3)(a+2)} \right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''} \implies \frac{4a+2}{(a+1)(a+2)} = \frac{6a+6}{(a+3)(a+2)} \implies a = 0 \quad a = 1$$

Si $a = 0$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 1/2) \neq \overrightarrow{A'A''} = (1, -1, -1/6)$$

Esta solución no vale.

$a = 1$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 0) = \overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a = 1$ los tres puntos están alineados.

b) La recta h que une estos puntos:

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = (1, -1, 0) \\ A(1, -1, -1) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

c)

$$d(O, h) = \frac{|\vec{OA} \times \vec{u}_h|}{|\vec{u}_h|} = \frac{|(1, -1, -1) \times (1, -1, 0)|}{|(1, -1, 0)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ u}^2$$

5.2. Modelo 2004 - Opción B

Problema 5.2.1 (2 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 + \frac{m}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -2, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1/2, m/2, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

$$\vec{P_r P_s} = (1, 5, -1)$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & m/2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}(m - 1) = 0 \implies m = 1$$

Cuando $m = 1$ los vectores directores de las rectas r y s coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

b)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = (1, 1, 2) \\ \vec{v} = (1, 5, -1) \\ P(0, -2, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 5 & y + 2 \\ 2 & -1 & z - 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 11x - 3y - 4z - 2 = 0$$

Problema 5.2.2 (2 puntos) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ P_r(3, 4, 5) \end{cases}$$

Un plano perpendicular a esta recta y que contenga al punto P será:

$$\pi : 2x + y + 3z + \lambda = 0 \implies 6 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -5$$

$$\pi : 2x + y + 3z - 5 = 0$$

Este plano corta a la recta r en el punto P' :

$$2(3 + 2\lambda) + 4 + \lambda + 3(5 + 3\lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = -\frac{10}{7}$$

$$P' \left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7} \right)$$

$$\overrightarrow{P'P} = (3, -1, 0) - \left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7} \right) = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7} \right)$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{P'P} = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7} \right) \\ P(3, -1, 0) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 3 + \frac{22}{7}\lambda \\ y = -1 - \frac{25}{7}\lambda \\ z = -\frac{5}{7}\lambda \end{cases}$$

Problema 5.2.3 (3 puntos) Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.
- (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.
- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4))$.

Solución:

a) $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\implies$ no hay puntos críticos.

La función es par.

b)

$$f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{(1 + (\sin^2 x))^2} = 0 \implies -2 \sin x \cos x = 0$$

$$-2 \sin x \cos x = 0 \implies \begin{cases} \sin x = 0 \implies x = 0, & x = -\pi, & x = \pi \\ \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} & x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

En los puntos de abscisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

En el puntos de abscisa $x = -\frac{\pi}{2}$ y en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

c)

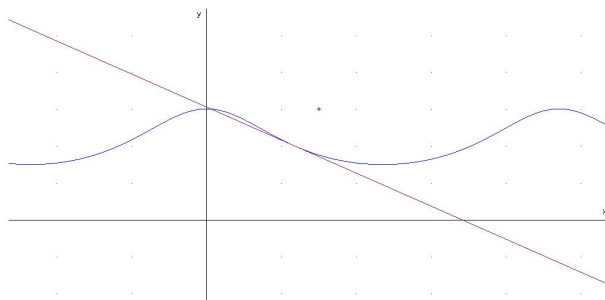
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta tangente

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Representación gráfica



Problema 5.2.4 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x+3y-az=4 \\ x+ay+z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{cases}$$

Se pide:

- (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \implies a = 2, \quad a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \implies |\overline{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

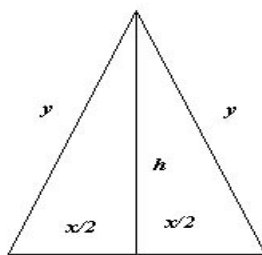
- b) Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el $\text{Rango}(A)$ podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

5.3. Junio 2004 - Opción A

Problema 5.3.1 (2 puntos) Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \implies x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \implies y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 5.3.2 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

Solución:

a) a) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \implies y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \implies x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1/2$	—	+	+
$x - 1/2$	—	—	+
$f'(x)$	+	—	+
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx &= \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} dx = \\ &= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right) dx = x - \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) + C \\ \int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx &= \left. x - \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \ln 5\end{aligned}$$

Problema 5.3.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a .

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \implies |A| = -a-3 = 0 \implies a = -3$$

Si $a \neq -3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$ y como el sistema es homogéneo resultaría que es compatible determinado. la solución en este caso sería $x = y = z = 0$.

Si $a = -3$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$ y como el sistema es homogéneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

- b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4z \\ x + 2y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 5.3.4 (3 puntos) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \quad \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0; \quad \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
 b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
 c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2 .

Solución:

a)

$$r : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = -3y + 3 \\ -x + 2 = -3z + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 10 = 0 \end{cases}$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1 : 3x - 2y + z - 2 = 0$, y tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que $|A| = -4 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) \Rightarrow$ La recta corta al plano π_1 .

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2 : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$, y tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Por otra parte tenemos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\frac{3}{2} \neq \frac{2}{2} \implies \pi_1$ y π_2 se cortan.

c) Un punto de r es $P_r(2, 1, 4)$ y tendremos:

$$d(P_r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

5.4. Junio 2004 - Opción B

Problema 5.4.1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1} .

b) (1 punto) Hallar la matriz X , tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

b)

$$AXA^T = B \implies A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \implies X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 5.4.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
- b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

- a) La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x + y = 3$$

- b) La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

Problema 5.4.3 (3 puntos)

- a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k :

$$\begin{array}{lclcl} \pi_1 : & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2 : & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3 : & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

- b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -3k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ k = -2 \end{cases}$$

Si $k \neq \frac{1}{3}$ y $k \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = \frac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1/3 \end{array} \right| = -\frac{7}{3} \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$. Por otra parte tenemos

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1/3 \end{array} \right| = -\frac{224}{27} \neq 0$$

Luego $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \Rightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1/3} \Rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{1}{3} = \frac{1/3}{1} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{-1}{-1/3} \Rightarrow \text{son paralelos} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Dos planos son paralelos (π_2 y π_3) y otro plano corta a los dos (π_1).

Si $k = -2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -7 \neq 0$$

Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se comprueba que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

b) Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos r :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \text{ y su vector director será:}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 0, -7)$$

Problema 5.4.4 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

- (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
- (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
- (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

- Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \implies m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \implies 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

- Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \implies y = 1 + a^2 \implies A(0, 1 + a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \implies x = a + \frac{1 - a^2}{2a} = \frac{a^2 + 1}{2a}$.

Luego el punto buscado es $B\left(\frac{a^2 + 1}{2a}, 0\right)$.

-

$$d(A, P) = \sqrt{(a - 0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1 - a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - a^2)^2}{4a^2} + (1 - a^2)^2} = (1 - a^2)\sqrt{\frac{1 + 4a^2}{4a^2}} = \frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(A, P) = 2d(B, P) \implies a\sqrt{1+4a^2} = 2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2} \implies$$

$$a = \frac{1-a^2}{a} \implies a^2 = 1-a^2 \implies 2a^2 = 1 \implies a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0, 1)$ la solución pedida es la positiva $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.5. Septiembre 2004 - Opción A

Problema 5.5.1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B .
- b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

a)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = BX \implies B^{-1}A = B^{-1}BX \implies B^{-1}A = X$$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 5.5.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
- b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \implies |A| = 0$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 6k + 5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2 + 2k - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} k^2 - 6k + 5 = 0 \\ 8(k-1) = 0 \\ 2-2k = 0 \\ k^2 + 2k - 3 = 0 \end{array} \right\} \implies k = 1$$

Problema 5.5.3 (3 puntos) Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

- a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π .
- b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ .
- c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

- a) Calculo r , recta perpendicular a π que pasa por $P(0,0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 2, 3) \\ P(0, 0, 0) \end{array} \right\} \implies r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'' :

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \implies t = \frac{3}{7} \implies P'' \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7} \right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'' , es decir:

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7} \right)$$

El punto simétrico de $P(0,0,0)$ respecto al plano π es $P' \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7} \right)$.

b)

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 2, 3) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y = 0$$

c) Los puntos de corte de π con los ejes será:

Corte con el eje OX : $y = 0, z = 0 \implies x = 6 \implies A(6, 0, 0)$

Corte con el eje OY : $x = 0, z = 0 \implies y = 3 \implies B(0, 3, 0)$

Corte con el eje OZ : $x = 0, y = 0 \implies z = 2 \implies C(0, 0, 2)$

Tendremos: $\vec{OA} = (6, 0, 0)$, $\vec{OB} = (0, 3, 0)$, $\vec{OC} = (0, 0, 2)$:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6u^3$$

Problema 5.5.4 (3 puntos) Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f .
- (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

a)

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0 \implies x = 4, \quad x = 1, \quad x = 7$$

Como $(x - 4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

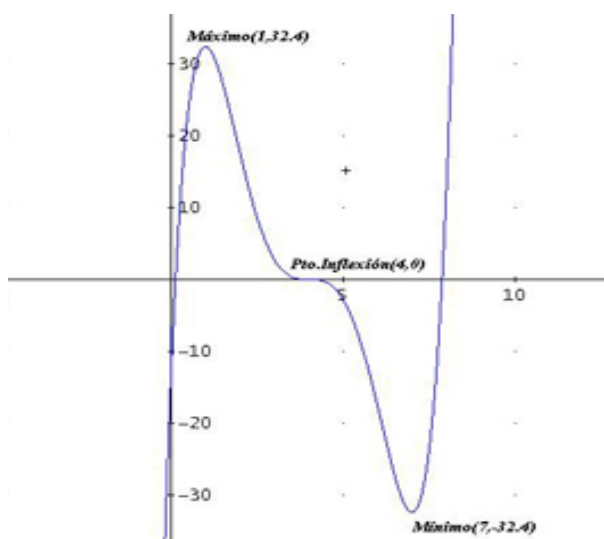
- b) Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \frac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\frac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.
- c) Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \implies x = 4, \quad x = 1,8787, \quad x = 6,1213$$

Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \implies f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \implies f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es a través de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \implies f'''(4) = -18 \neq 0$$

Luego se trata de un punto de inflexión.



5.6. Septiembre 2004 - Opción B

Problema 5.6.1 (2 puntos)

- a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
- b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

- a) Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3 \implies |2x - y - 4| = 9 \implies \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

- b) El conjunto será:

$$\left\{ (x, y, z) \in R^3 : (x, y, z) \in r \vee (x, y, z) \in s \right\}$$

Problema 5.6.2 (2 puntos) El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
- b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
- c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

Solución:

- a)

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- b)

$$r : \begin{cases} \vec{ur} = (2, -2, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c) Corte con el eje OX : $y = 0, z = 0 \implies x = -1 \implies A(-1, 0, 0)$
 Corte con el eje OY : $x = 0, z = 0 \implies y = 1 \implies B(0, 1, 0)$
 Corte con el eje OZ : $x = 0, y = 0 \implies z = -2 \implies C(0, 0, -2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (0, 0, -2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AB} &= (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{4+4+1}}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

Problema 5.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
 b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
 c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje OX , la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

- a) **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \implies x = -1, x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$x+1$	—	+	+
$-x$	+	+	—
$f'(x)$	—	+	—

En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

Asíntotas:

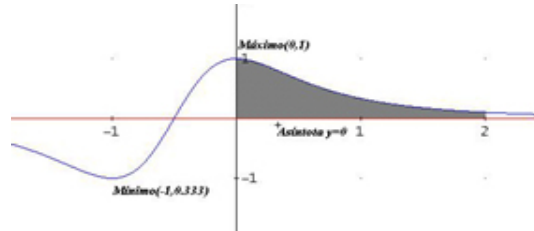
- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.

■ **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

■ **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Representación Gráfica:



c)

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2+x+1} \Big|_0^2 = \frac{6}{7}$$

Problema 5.6.4 (3 puntos)

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

$\text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1 .

Si tenemos en cuenta que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

$\text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

b)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 2 - z \\ x + 2y = 1 - 2z \end{array} \right. \implies \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Capítulo 6

Año 2005

6.1. Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 (2 puntos)

- a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

- b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

- a) La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.
- b) La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x , luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX , y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 6.1.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Determinar el punto P , contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
- b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \frac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P .

Solución:

a)

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \implies x \pm 2$$

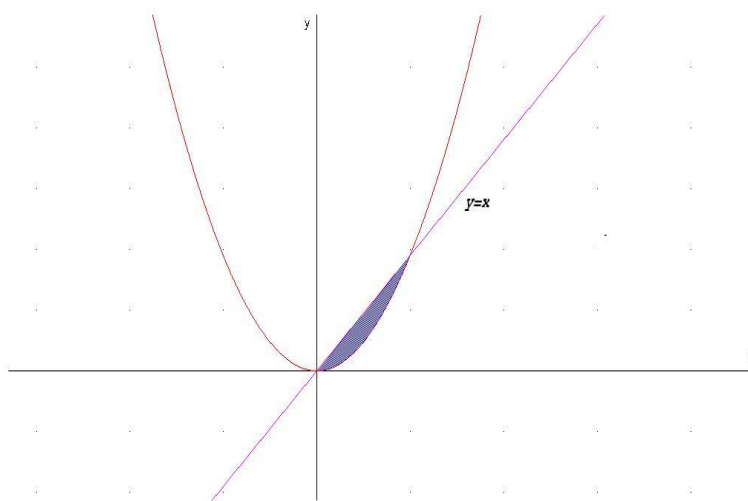
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

b) La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \implies x^2 - 2x = 0 \implies x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} u^2$$



Problema 6.1.3 (3 puntos)

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

- b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \implies \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \frac{5}{2}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{55}{2} \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ sistema incompatible.

b) El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Problema 6.1.4 (3 puntos) Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$D(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (2 + \lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 + \lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 4|\lambda - 5| = 2$$

$$|\lambda - 5| = \frac{1}{2}$$

$$\lambda - 5 = \frac{1}{2} \implies \lambda = \frac{11}{2} \implies D\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

$$\lambda - 5 = -\frac{1}{2} \implies \lambda = \frac{9}{2} \implies D\left(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

6.2. Modelo 2005 - Opción B

Problema 6.2.1 (2 puntos) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \implies a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ sistema incompatible.

b) Cuando $a = 1$:

$$\begin{cases} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{cases} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{15}$$

Problema 6.2.2 (2 puntos) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n .

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

b) $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 6.2.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde $\ln$ significa *Logaritmo Neperiano*.

- (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de f .
- (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

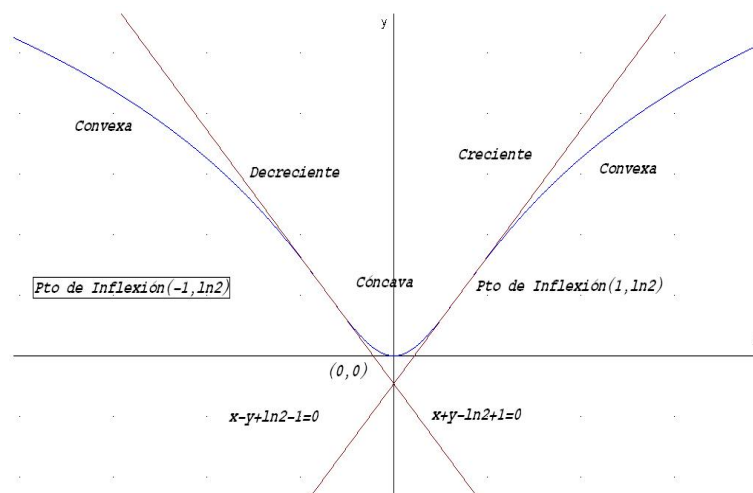
Luego en el punto $(0, 0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \implies x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

b) Representación gráfica



c) La tangente en el punto $(-1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \implies y - \ln 2 = -x + 1 \implies x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \implies y - \ln 2 = x - 1 \implies x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

Problema 6.2.4 (3 puntos) Se considera la recta: $r : \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m :

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

- (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
- (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 2) \\ P_r(0, 4, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 1) \\ P_s(5 - 5m, 7 - 3m, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5 - 5m, 3 - 3m, -5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 - 5m & 3 - 3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15(m - 2) = 0 \implies m = 2$$

Cuando $m = 2$ el $\text{Rango}(A) = 2$, y además el $\text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies$ las dos rectas se cortan.

b) Si $m = 0$ las dos rectas se cortan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 1) \\ P_s(5, 7, 0) \end{cases}$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$

6.3. Junio 2005 - Opción A

Problema 6.3.1 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \implies du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x)dx &= 2xf(x)\Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x)dx = 1 \implies \\ \int_0^1 f(x)dx &= -\frac{1 - 2xf(x)}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1 - 2f(1)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 6.3.2 (2 puntos) Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que

$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

■

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \implies p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

■

$$p''(x) = 6ax + 2b \implies p''(0) = 2b = 0 \implies b = 0$$

$$p(0) = d = 1$$

■

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\implies \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \implies a + 2c = 1, \text{ y } 3a + c = 0 \implies$$

$$a = -\frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5} \implies p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

Problema 6.3.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

- (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m .
- (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

- Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array} \right) \implies$$

$$\implies |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \implies m = 2, \quad m = -1, \quad m = 4$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$
incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\bar{A}$, para ello cogemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\bar{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ incógnitas} \implies$ el sistema es compatible indeterminado.

- b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x + y = 3 - z \\ 4x + 3y = 7 - 3z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{5} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 6.3.4 (3 puntos) Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

a) Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9 \implies x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0$$

b) Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$\begin{aligned} (3\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (1-4\lambda)^2 - 2(3\lambda) - 6(1+\lambda) + 2(1-4\lambda) + 2 &= 0 \implies \\ \implies 26\lambda(\lambda-1) &= 0 \implies \lambda = 1, \lambda = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda = 0 \implies (0, 1, 1)$ y para $\lambda = 1 \implies (3, 2, -3)$.

6.4. Junio 2005 - Opción B

Problema 6.4.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y = 1 - 3z \\ 2x + y = 2 + z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{3}t \\ y = -\frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

- b) Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right)$$

$$\text{sería } a(1, 2, 3, 1) + b(2, 1, -1, 2) = (5, 1, \alpha, \beta) \implies \begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \implies \\ a = -1, b = 3 \implies \alpha = -6, \beta = 5$$

Problema 6.4.2 (2 puntos) Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

$$\text{siendo } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \implies XA = AB \implies X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 6.4.3 (3 puntos) Calcular los siguientes límites

- a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

- b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= [\infty - \infty] = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 - x})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}}} &= \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \right] &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}}{1/x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 e^x}{1+e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2xe^x - x^2 e^x}{2e^{2x}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x - x^2}{2e^x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 - 2x}{2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2e^x} = 0\end{aligned}$$

Problema 6.4.4 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.
- b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 4) \\ P_r(1, 1, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (10, 0, -5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\vec{u}_t = (2, 0, -1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 4) \\ P_r(1, 1, 1) \end{cases} \quad \pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - 10y + 6z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x + 5y + 2z - 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x - 10y + 6z + 1 = 0 \\ x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\left| [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] \right| = \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-15|$$

$$d = \frac{\left| [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] \right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

6.5. Septiembre 2005 - Opción A

Problema 6.5.1 (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 : x + z &= \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z &= \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z &= -\lambda \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{cases} x + & & z = & \lambda \\ 4x + & (\lambda - 2)y + & (\lambda + 2)z = & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1)x - & & (\lambda + 6)z = & -\lambda \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) & -\lambda \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3\lambda + 8) = 0 \implies \lambda = 2, \quad \lambda = -\frac{8}{3}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -\frac{8}{3} \implies |A| \neq 0 \implies$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array} \right) \implies \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6} &\neq \frac{1}{-8} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6} &\neq \frac{4}{-8} \implies \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{aligned}$$

Si $\lambda = -\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que $\text{Rango}(\overline{A}) = 3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\neq \frac{0}{-14/3} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan} \\ \frac{1}{-10/3} &= \frac{1}{-10/3} \neq \frac{-8/3}{8/3} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos} \\ \frac{4}{-10/3} &\neq \frac{-14/3}{0} \implies \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{aligned}$$

Problema 6.5.2 (2 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- (1 punto) Hallar la recta t , perpendicular a r y a s , que pasa por el origen.
- (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -3, -3) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -2, -1) \\ P_s(0, -7, -4) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2), \quad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1)$$

a)

$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3, -1, -1)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -1, -1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) Sustituimos t en s y tenemos:

$$\begin{cases} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{cases} \implies \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3, -1, -1)$.

Problema 6.5.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
- b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
- c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \implies \alpha = 2, \quad \beta = -1$$

b)

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 A^2 A = (2A - I)^2 A = (4A^2 + I^2 - 4AI)A = (4A^2 - 4A + I)A = \\ &= 4(2A - I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A - I) + A = \\ &= 8(2A - I) - 4A - 8A + 4I + A = 5A - 4I = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \implies A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2 \\ \implies AX - XA = 0 \implies AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a + 2c = a \implies c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \implies a = d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 6.5.4 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$
- (1 punto) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.
- (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

a)

$$f(a) = \frac{1}{a}, \quad m = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

b) Haciendo $y = 0 \implies A(2a, 0)$ y haciendo $x = 0 \implies B\left(0, \frac{2}{a}\right)$.

c)

$$d(a) = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{2}{a}\sqrt{a^4 + 1}$$

$$d'(a) = \frac{2a^4 - 2}{a^2\sqrt{a^4 + 1}} = 0 \implies a = 1, \quad a = -1$$

Como $a > 0 \implies a = 1$ En el intervalo $(-1, 1)$ la d' es negativa y en el $(1, +\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a = 1$ y, por tanto, es un mínimo.

6.6. Septiembre 2005 - Opción B

Problema 6.6.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde $\ln$ significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX .

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \implies x = 2$$

$$f(2) = \ln \frac{4}{1} = \ln 4 = 2 \ln 2 \implies (2, 2 \ln 2)$$

Problema 6.6.2 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4}$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \implies x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \implies f'(x) > 0 \implies$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty) \implies f'(x) < 0 \implies$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0, f(0)) = (0, 1/4)$ la función presenta un máximo.

b)

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx &= \frac{1}{4} \\ \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx &= \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+e^x} + C \\ \int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx &= -\frac{1}{1+e^x} \Big|_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \implies \\ \frac{1}{1+e^a} &= \frac{1}{4} \implies 1+e^a = 4 \implies e^a = 3 \implies a = \ln 3 \end{aligned}$$

Problema 6.6.3 (3 puntos) Se considera la familia de planos:

$$mx + (m - 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

- (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
- (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.
- (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- Basta dar dos valores a m que sean distintos:

$$\begin{cases} m = 0 \implies -2y + 3z + 1 = 0 \\ m = -1 \implies -x - 3y = 0 \end{cases}$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma paramétrica

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (9, -3, -2), \quad P_r(-6, 2, 1) \implies r : \begin{cases} x = -6 + 9\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

- Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m + (m - 2) + m + 1 = 0 \implies m = \frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - 2\right)y + 3\left(\frac{1}{3} + 1\right)z + \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 0 \implies x - 5y + 12z + 4 = 0$$

-

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, -1) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases}$$

Los vectores $(m, m-2, 3m+3)$ y $(-2, -1, -1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m - m + 2 - 3m - 3 = 0 \implies m = -\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x + \left(-\frac{1}{6} - 2\right)y + 3\left(-\frac{1}{6} + 1\right)z + \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 0 \implies x + 13y - 15z - 5 = 0$$

Problema 6.6.4 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Hallar A^{10} .
- b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B .
- c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10} .

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 7

Año 2006

7.1. Modelo 2006 - Opción A

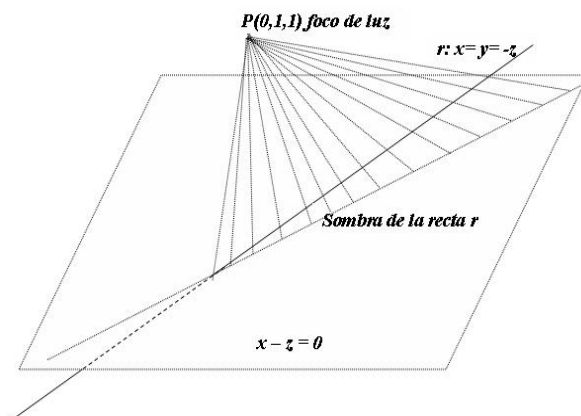
Problema 7.1.1 (2 puntos) Un punto de luz situado en $P(0, 1, 1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Solución:



$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

El plano que contiene a P y a r será:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_r P} = (0, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de r será la intersección de los planos π_1 y π :

$$s : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \implies x = 1, y = 3 \implies (1, 3, 1)$

Problema 7.1.2 (2 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 6, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 0) \\ P_s(3, -4, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2) = 2(-3, 1, 1)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (-3, 1, 1) \\ P_t(2, -1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Problema 7.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = k \\ x + 2y + 3z = 2 \\ kx + ky - 4z = -1 \end{cases}$$

- (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k .
- (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ k & k & -4 & -1 \end{array} \right), \quad |A| = 4k - 4 = 0 \implies k = 1$$

Si $k \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado se observa que la cuarta fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, en conclusión: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b)

$$\begin{cases} 2x+ & 3y- & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 + 11\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 7.1.4 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

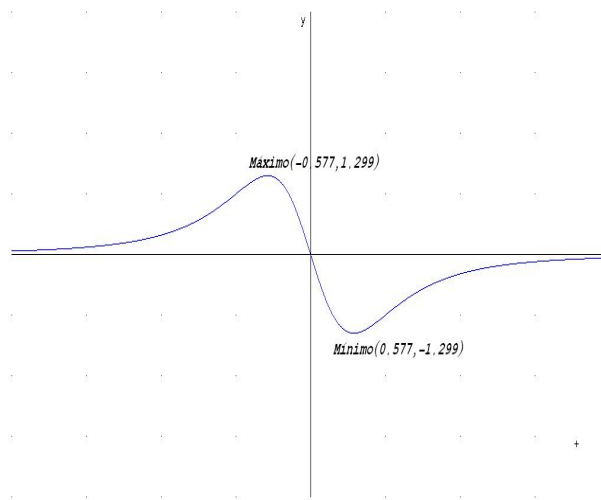
$$\int_0^a f(x) dx = -1$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{4(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3} = 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente



Luego en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

b)

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx = -2 \int_0^a 2x(1+x^2)^{-2} dx = -2 \frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} \Big|_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2} \Big|_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \implies a = \pm 1, \text{ como } a > 0 \implies a = 1$$

7.2. Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.1 (2 puntos)

- a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

a)

$$f(x) = g(x) \implies \frac{2}{x} = \sqrt{x^2 - 3} \implies x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

b) Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \implies m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \implies y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \implies m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \implies y-1 = 2(x-2)$$

Como $m = -\frac{1}{m'} \implies$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 7.2.2 (2 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$
- (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

a)

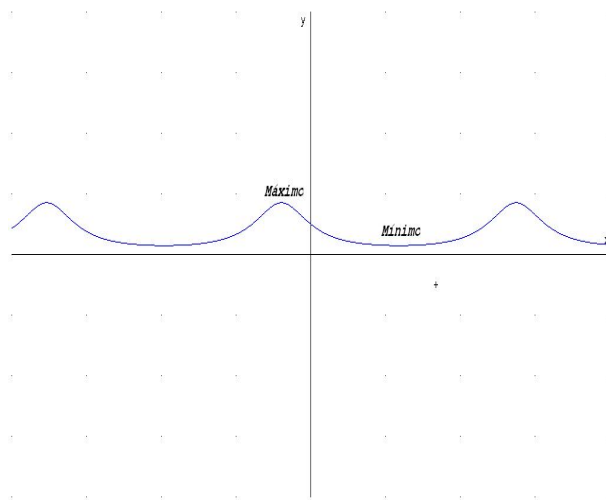
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2 + \sin x - \cos x)^2} = 0 \implies \cos x + \sin x = 0 \implies \sin x = -\cos x$$

$$\implies \tan x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



- b) Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

Problema 7.2.3 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .
- b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 1, 1) \\ P_r(-1, -2, -3) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

b)

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

Problema 7.2.4 (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.
- b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

a)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \implies A^2 = 2A - I$$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

7.3. Junio 2006 - Opción A

Problema 7.3.1 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = k^2 - k - 2 = 0 \implies k = -1, k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado $x = y = z = 0$.

Si $k = 2 \implies \text{SCI}$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $k = -1 \implies \text{SCI}$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 7.3.2 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a + 2c = a \implies c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \implies a = d \\ c = c \\ d = 2c + d \implies c = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 7.3.3 (3 puntos) Se pide:

- (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.
- (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.
- (1 punto) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

- $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

- Asíntotas:

a) Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

b) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

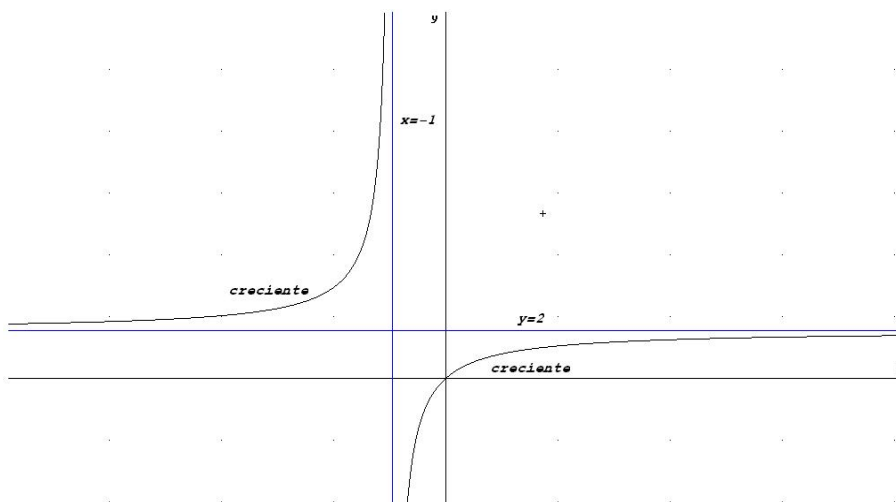
c) Oblicuas: No hay al haber horizontales.

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \text{siempre creciente}$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

- Representación gráfica:



- b) Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \frac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $\mathbb{N} - \{0\}$.

Otra manera de demostrarlo:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

luego la sucesión es creciente.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 3n + 2} = 2$$

Problema 7.3.4 (3 puntos) Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 2, -4) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, 1) \\ P_s(2, -1, -2) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{OP_r} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{OP_s} = (2, -1, -2)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_r} \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_s} \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \qquad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 0 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 3 & x-2 \\ -1 & 1 & y+1 \\ -2 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\vec{u}_h = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3, -5, -4)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_h \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_h \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \qquad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

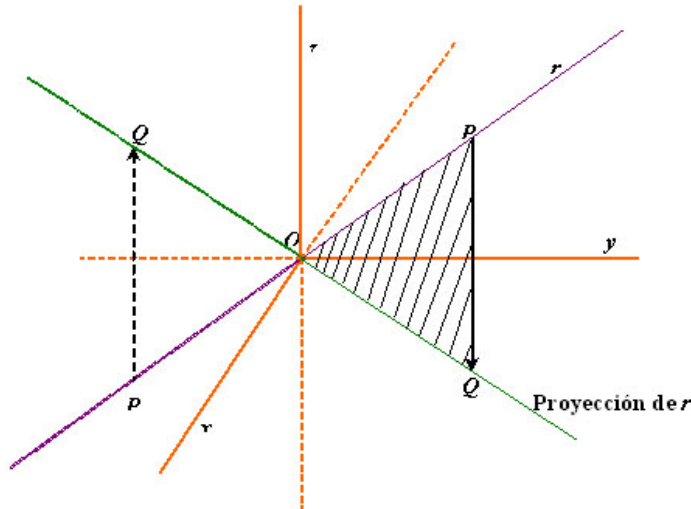
$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -2 & x+1 \\ -5 & 2 & y-2 \\ -4 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-2 \\ -5 & 1 & y+1 \\ -4 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$h : \begin{cases} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$

7.4. Junio 2006 - Opción B

Problema 7.4.1 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (4, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{OQ}$ forman el triángulo OPQ , para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OP} \times \vec{OQ}| = \frac{1}{2} \sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \implies \lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{Si } \lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \implies P \left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

$$\text{Si } \lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \implies P \left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

Problema 7.4.2 (2 puntos) Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \quad s : \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-3, 4, 1) \\ P_r(-4, 7, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, -4, -1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5, -5, 0)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

Problema 7.4.3 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
- (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

a)

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1, \quad a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

b) M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1 .

Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 7.4.4 (3 puntos) Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

a) a) ■ $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.

■ Asíntotas:

1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

2) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

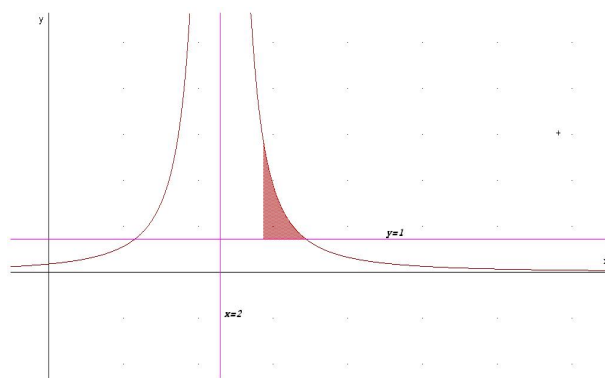
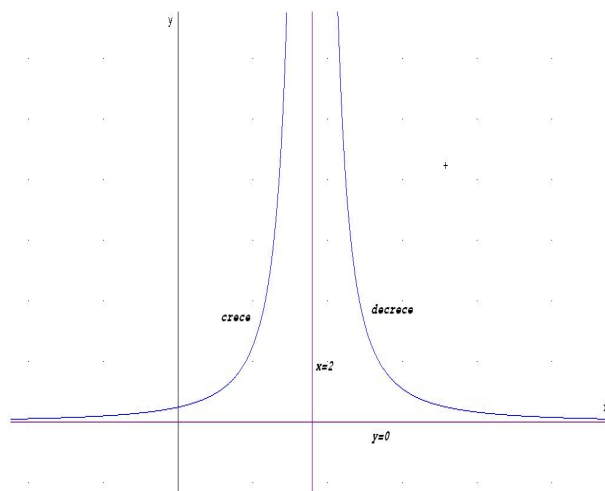
3) Oblicuas: No hay al haber horizontales.

■ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decrece	crece



b)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \implies x = 1, \quad x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

c)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \implies x = 1, \quad x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^3 \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{x-2} - x \right]_{5/2}^3 = \frac{1}{2}$$

7.5. Septiembre 2006 - Opción A

Problema 7.5.1 (2 puntos) Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x^2 + 2x}$$

$$1 = A(x+2) + Bx$$

$$\text{si } x = 0 \quad 1 = 2A \implies A = 1/2$$

$$\text{si } x = -2 \quad 1 = -2B \implies B = -1/2$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} = \ln \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 7.5.2 (2 puntos)

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x .

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Continua en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2a \cos x) = 2a \end{aligned} \right\} \implies a = 1$$

Continua en $x = \pi$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2a \cos x) = \pi^2 - 2a = \pi^2 - 2 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (ax^2 + b) = a\pi^2 + b = \pi^2 + b \end{aligned} \right\} \implies b = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 \sin x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ 2x & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 3 \\ f'(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \text{No es derivable en } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'(\pi^-) &= 2\pi \\ f'(\pi^+) &= 2\pi \end{aligned} \right\} \implies \text{Es derivable en } x = \pi$$

Problema 7.5.3 (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$
- b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$? Razonar la respuesta.
- c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

Solución:

a)

$$|A^2| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$|A|^2 = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = (-1)(-1) = 1$$

Luego $|A^2| = |A|^2$.

$$|A + I| = \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$|A| + |I| = -1 + 1 = 0 \implies |A + I| = |A| + |I|$$

b) Si podemos asegurar que $|M^2| = |M|^2$:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = |M|^2$$

c)

$$M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad |I| = 1$$

$$|M + I| = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - cd$$

$$(a+1)(d+1) - cd = ad - cb \implies a = -d$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Problema 7.5.4 (3 puntos) Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

- (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B .
- (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B .
- (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .

Solución:

a) $d(A, X) = d(B, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Se trata de un plano que se llama mediador.

b) $d(A, B) = d(A, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2 = 0$$

Se trata de una esfera

- c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ como C es un punto del plano $x + y + z = 3$ tendrá de coordenadas $C(3 - \mu - \lambda, \mu, \lambda)$. Luego:

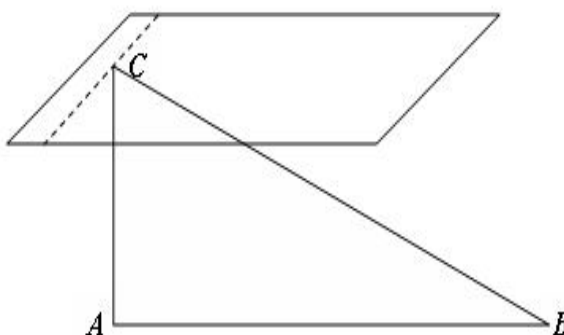
$$\overrightarrow{AC} = (3 - \mu - \lambda, \mu, \lambda) - (0, 1, 0) = (3 - \mu - \lambda, \mu - 1, \lambda)$$

$$(3 - \mu - \lambda, \mu - 1, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 3 - \mu - \lambda - \mu + 1 + \lambda = 0 \implies \mu = 2$$

Luego los puntos de ese plano con la condición de perpendicularidad con el vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se trata de una recta.



7.6. Septiembre 2006 - Opción B

Problema 7.6.1 (2 puntos)

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $-5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \implies \lambda = 1.$

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Problema 7.6.2 (2 puntos)

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$$

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{cases} \implies \begin{cases} a(a-1) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1 \\ a(a+b-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \implies b = 0, \quad b = 1 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} a = 0, \quad b = 1 \\ a = 1, \quad b = 0 \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = A$; $A^3 = A^2 A = AA = A$; $A^4 = A^3 A = AA = A \dots A^{10} = A$
Luego:

$$M = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10} = 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 7.6.3 (3 puntos) Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

Asíntotas:

■ Verticales: No hay

■ Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{2x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t e^{-2t}) = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{2e^{2t}} = 0$$

Luego cuando la $x \rightarrow -\infty$ hay una asíntota $y = 0$

■ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía:

$$f'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decrece	crece

La función es creciente en el intervalo: $(-1/2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, -1/2)$

Como en el punto $(-1/2, -1/(2e))$ la función pasa de decrecer a crecer estamos ante un mínimo.

Curvatura:

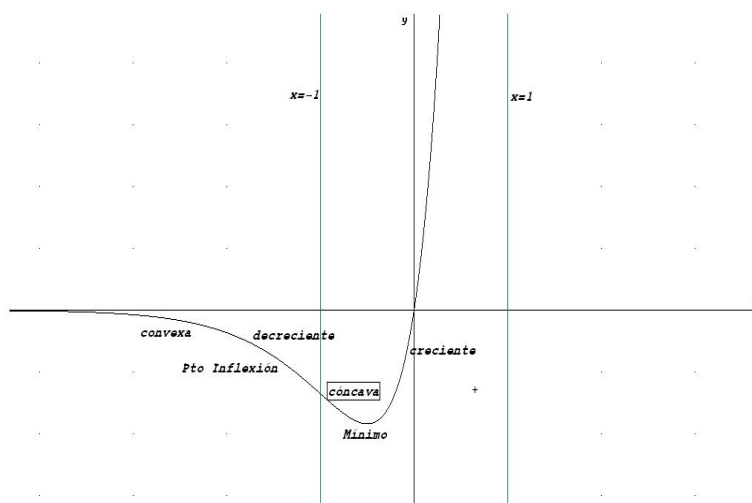
$$f''(x) = 4e^{2x}(x + 1) = 0 \implies x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Como en el punto $(-1, -1/(e^2))$ la función pasa de convexa a cóncava estamos ante un punto de inflexión.

b)

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 x e^{2x} dx \right| + \left| \int_0^1 x e^{2x} dx \right|$$



La integral $\int xe^{2x} dx$ se resuelve por partes, llamamos:

$$u = x \implies du = dx \text{ y } dv = e^{2x} dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

$$\int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{2x-1}{4} \right) = F(x)$$

$$\text{Área} = |F(0) - F(-1)| + |F(1) - F(0)| = \left| \frac{3e^{-2} - 1}{4} \right| + \left| \frac{e^2 + 1}{4} \right| = 2,245762562$$

Problema 7.6.4 (3 puntos) Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

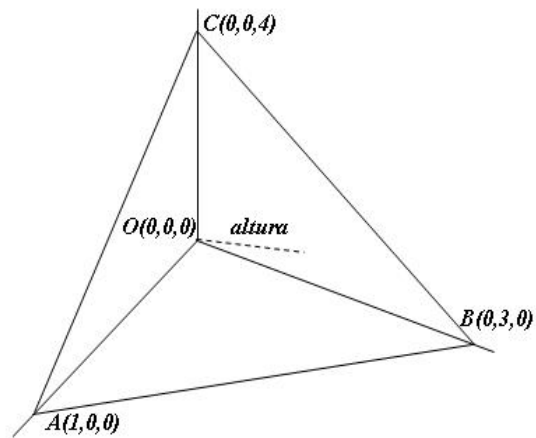
- (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.
- (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O .

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (0, \lambda, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 4) \end{cases} \implies V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} | -4\lambda | = 2 \implies$$

$$\frac{4\lambda}{6} = 2 \implies \lambda = 3$$



b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, 3, 0) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & 3 & y \\ 4 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 12|}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{12}{13} u$$

Otra forma de resolver el problema sería:

$$S_{\text{base}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{|(-12, -4, -3)|}{2} = \frac{13}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{12}{13} u$$

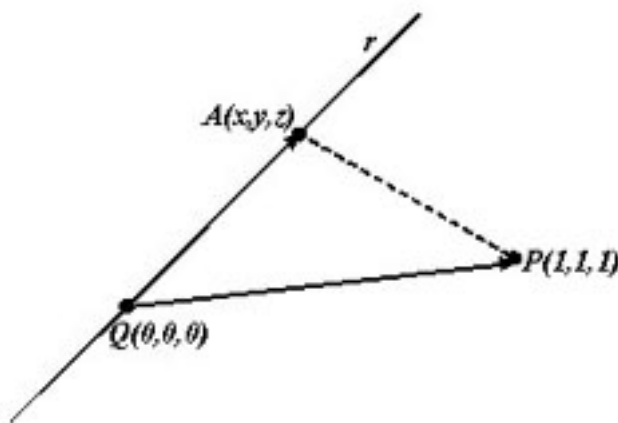
Capítulo 8

Año 2007

8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 (2 puntos) Se considera la recta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de r , hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A , P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x, y, z)$ de la recta sería

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \implies A(\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} |(2\lambda, -2\lambda, 0)| = \sqrt{2\lambda^2} = 1$$

$$\text{Luego: } \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ y } A \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Problema 8.1.2 (2 puntos)

- a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$.

- b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \quad \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y+z-2=0$$

b)

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 8.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

- a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k .
b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array} \right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \implies k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El $\text{Rango}(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Por tanto, $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene Solución). Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 8.1.4 (3 puntos)

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

- a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$$

$$\text{Luego } F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$$

- b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \\ y - \frac{19}{4} &= 3(x - 1) \end{aligned}$$

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
- b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX .

Solución:

- a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \implies m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \implies a = 5, \quad a = -1$$

Como $a > 0 \implies$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \implies (5, 25)$ es el punto buscado.

- b) Los puntos de corte con el eje OX son

$$6x^2 - x^3 = 0 \implies x = 0, \quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = 2x^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^6 = 108 u^2$$

Problema 8.2.2 (2 puntos) Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (kx+5) \left(\frac{x+3}{x} - 1 \right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \implies k = \frac{2}{3}$.

Problema 8.2.3 (3 puntos) Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

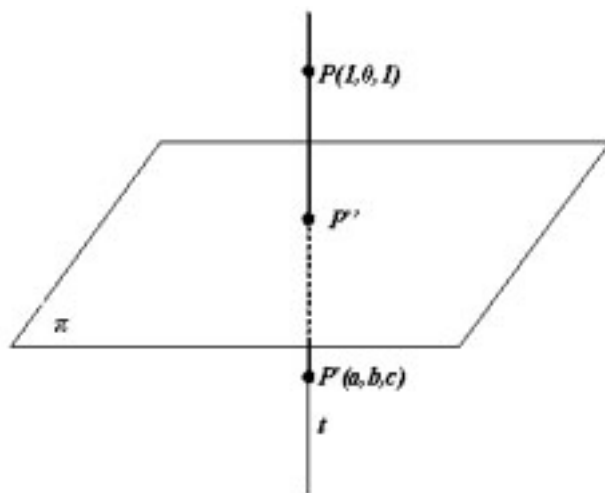
$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

- (1,5 puntos) Obtener un punto P' , simétrico de P respecto del plano π .
- (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π .

Solución:

- Sería el siguiente dibujo. Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π , donde t es una recta perpendicular a π y que pasa por P .

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 1) \\ P_t(1, 0, 1) \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{3} \implies P'' \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

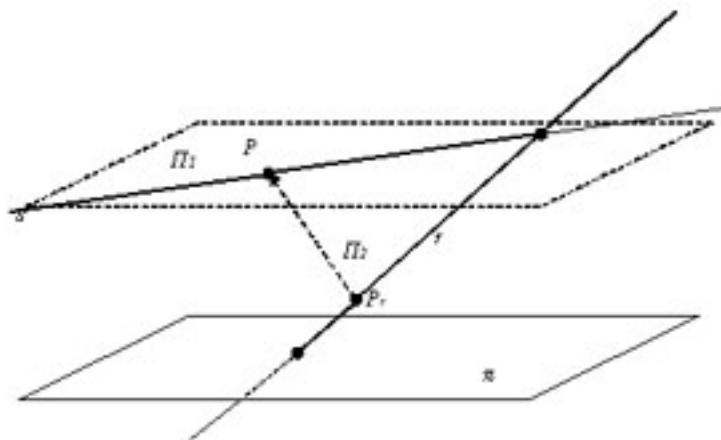
$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases} \implies P' \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

El plano π_2 contiene a P y a r

Sería el siguiente dibujo



$$\pi_1 : x + y + z + \lambda = 0 \text{ y como contiene a } P \implies 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies \pi_1 : x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -2) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 8.2.4 (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ .
- b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M . Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \implies |M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el $\text{Rango}(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8.3. Junio 2007 - Opción A

Problema 8.3.1 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m .

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \implies m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego en este caso el $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el $\text{Rango}(A) = 2$.

Problema 8.3.2 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \implies XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies$$

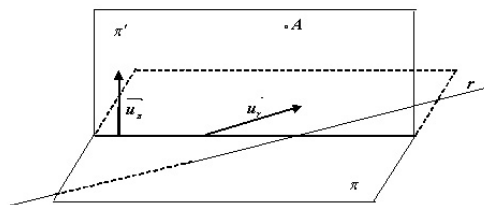
$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6a-9c=0 \\ b-d=0 \end{cases} \implies \begin{cases} b=d \\ c=2/3a \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e. } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.3.3 (3 puntos) Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

- (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .
- (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A , corta a r y es paralela a π .

Solución:

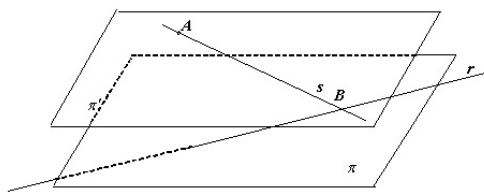


a)

$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_\pi = (1, -2, -3)$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y+2 \\ 0 & -3 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' : 3x + 3y - z = 0$$



b) Construyo un plano π' paralelo a π que contenga a A :

$$x - 2y - 3z + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 9 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -14$$

$$\pi' : x - 2y - 3z - 14 = 0$$

Corto con este plano a la recta r y obtengo el punto B :

$$-1 - \lambda - 2\lambda - 14 = 0 \implies \lambda = -5 \implies B(4, -5, 0)$$

La recta que buscamos pasa por A y B :

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ P_s(1, -2, -3) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Problema 8.3.4 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

- (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.
- (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

- $(a, f(a)) = (a, a^2 + m)$, $f'(x) = 2x \implies f'(a) = 2a$. Luego la recta tangente sería: $y - a^2 - m = 2a(x - a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0, 0) \implies -a^2 - m = -2a^2 \implies a = \sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).
- La recta $y = x$ tiene de pendiente 1 $\implies f'(a) = 2a = 1 \implies a = \frac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \implies m = \frac{1}{4}$$

8.4. Junio 2007 - Opción B

Problema 8.4.1 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \implies x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx = \int \left(1 - 16 \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx = x - 16 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx =$$

$$x - 16 \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) dx = x - 4 \int \frac{2}{t^2 + 1} dt = x - 8 \arctan t = x - 8 \arctan \frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left| \frac{4(3\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \right| = |-9,8269| = 9,8269 u^2$$

Problema 8.4.2 (2 puntos) Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

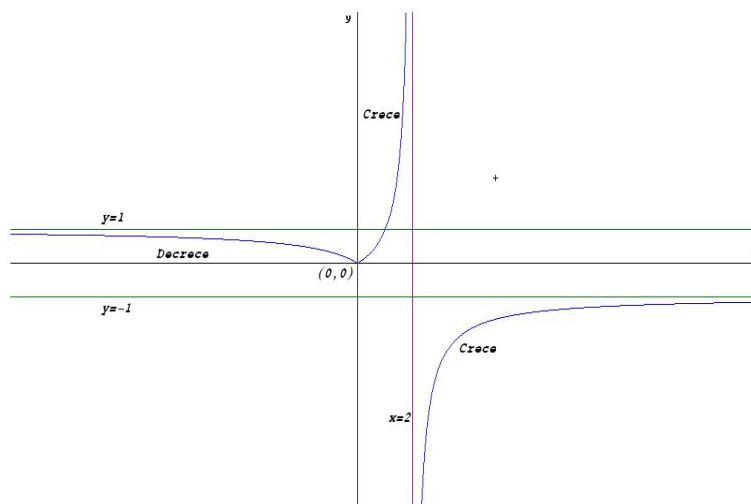
indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\frac{x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente



en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
Si $x < 0$ no hay

Si $x \geq 0 \implies x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

■ Horizontales:

Si $x < 0 \implies y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

Si $x \geq 0 \implies y = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

■ Oblicuas: No hay al haber horizontales

Problema 8.4.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a , b y c para que se verifique $AB = BA$.
- b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

b)

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.4.4 (3 puntos) Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

- (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A , B y C están alineados?
- (1 punto) Comprobar que si A , B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
- (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = -2(\lambda^2 + 2\lambda + 4) \neq 0 \text{ Siempre} \implies \text{No están alineados}$$

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2) \end{cases} \implies \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{cases}$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

c)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ A(0, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{u} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{v} = (0, -1, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y + z - 2 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u^2$$

8.5. Septiembre 2007 - Opción A

Problema 8.5.1 (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{un punto de } r \text{ es } P(3 + \lambda, 5 + \lambda, z = -1 + \lambda)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2(3 + \lambda) - (5 + \lambda) + 2(-1 + \lambda) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = |\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4, 6, 0), \quad P_2(2, 4, -2)$$

Problema 8.5.2 (2 puntos) Sea consideren las rectas:

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2), \quad \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1, 2, 1)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 1) \quad t : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

Problema 8.5.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k .
- (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2k^2 - 5k + 2 = 0 \implies k = \frac{1}{2}, \quad k = 2$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado.}$
- $k = \frac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otra parte

$$\begin{vmatrix} 3/2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & -1 & 3/2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies \text{Sistema Incompatible.}$

- $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

b)

$$\begin{cases} x+ & 3y+ & 2z = & -1 \\ 2x+ & y+ & z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7/5 - 1/5\lambda \\ y = -4/5 - 3/5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 8.5.4 (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 1, \quad x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	—	+	—
$f(x)$	Decrece ↘	Crece ↗	Decrece ↘

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 5/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	—	+	—	+
$f(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪	Convexa ∩	Cóncava ∪

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0, 3), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

b)

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$F(0) = 4 \implies C = 4 \implies F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 4$$

8.6. Septiembre 2007 - Opción B

Problema 8.6.1 (2 puntos) Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA^2 + BA = A^2 \implies XA^2 = A^2 - BA \implies X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(A^2)^{-1} = I_3$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

Luego:

$$X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1} = (I_3 - 2I_3)I_3 = -I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.6.2 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
- (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

- Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax + y + bz = 1$

tiene que ser combinación lineal de las otras dos, de esa manera el sistema

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \\ ax+ & y+ & bz = & 1 \end{cases} \text{ es Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

$$\begin{cases} a = k + 2l \\ 2k + 3l = 1 \\ -3k + l = b \\ 3k + 5l = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k = 2 \\ l = -1 \\ a = 0 \\ b = -7 \end{cases}$$

La ecuación sería $y - 7z = 1$

b)

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - 11\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego $(1 - 11\lambda) + (1 + 7\lambda) + \lambda = 4 \implies \lambda = -\frac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

$$x = \frac{25}{3}, \quad y = -\frac{11}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

Problema 8.6.3 (3 puntos) Sean las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s : \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .

Solución:

a)

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (3, 1, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 3(3, 1, 1)$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = -3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

$$\pi : 3x - 5y - 4z + 13 = 0$$

b) Elejimos un punto de la recta s por ejemplo $P_s(2, -1, -2)$

$$d(P_s, \pi) = \frac{|6 + 5 + 8 + 13|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5} u$$

Problema 8.6.4 (3 puntos) Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

- a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
- b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.
- c) (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Solución:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	Crece ↗	Decrece ↘	Crece ↗

Como la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$g''(x)$	-	+	-
$g(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪	Convexa ∩

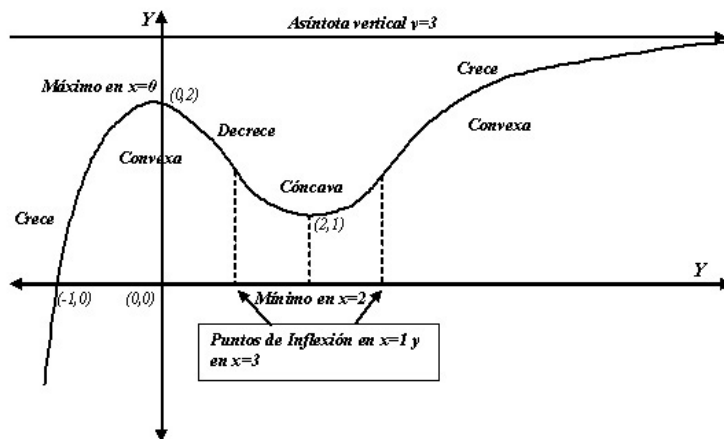
Como la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
- Horizontales: en $y = 3$, ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

b) Su representación sería:



c) $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \implies G'(x_0) = g(x_0) = 0 \implies x_0 = -1$

Capítulo 9

Año 2008

9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

- a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
- b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \implies y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \implies \text{No Hay}$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

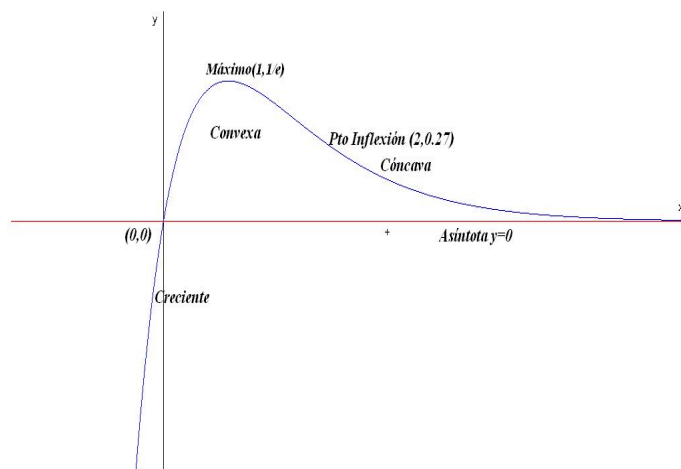
b) Representación gráfica

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \implies x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \implies x = 2$$



	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 9.1.2 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n + 5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-5}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-5n) \cdot \left(\frac{2+n}{1+n} - 1 \right) = -5$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n + 5} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n})(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})}{(n + 5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n - 3}{(n + 5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n^2 - 3/n^3}{(1 + 5/n)(\sqrt{1 + 2/n - 3/n^4} + \sqrt{1 - 1/n^3})} &= 1 \end{aligned}$$

Problema 9.1.3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y + (2m+1)z = 3m + 4 \end{cases}$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m .

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array} \right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \implies m = 1, m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

A la vista de la matriz se ve que el $\text{Rango}(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 \neq \text{Rango}(A) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 9.1.4 (3 puntos) Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

- a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.
- b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A , determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB .
- c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4) - (1, 0, 2) = (0, 1, -6)$.

$$P = (1, 0, 2) + \frac{1}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = (1, 0, 2) + \frac{2}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \implies \frac{1}{3} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \implies 3\lambda - 18(-1 + \lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), \quad P_r(0, -3, 0) \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$P(\lambda, -3 - \lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x + 4y = 4$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3 - \lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \implies |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \implies |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \implies \lambda = -\frac{43}{3} \implies P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \implies \lambda = -\frac{53}{3} \implies P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

Problema 9.2.2 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A .
- (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC .

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k+1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k-2, k+2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (k+1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \implies k = -1$$

b) Si $k = 0$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \right| = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2} u^2$$

Problema 9.2.3 (3 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.
- (1 punto) Calcular A^{10} .
- (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \implies X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \implies AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a+c = a \implies c = 0 \\ b+d = a+b \implies a = d \\ c = c \\ d = c+d \implies c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
- (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 + b) = 4a + b$$

$$4a + b = \frac{1}{4} \implies 16a + 4b = 1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2/x^3 & \text{si } x \leq -2 \\ 2ax & \text{si } -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -2$:

$$f'(-2^-) = \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a$$

$$-4a = \frac{1}{4} \implies a = -\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \implies a = -\frac{1}{16}$$

$$\text{Si } a = -\frac{1}{16} \implies b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ -1/16x^2 + 1/2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) El signo de la función f en el intervalo $[1, 2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2, 3]$

$$-1/16x^2 + 1/2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{8}$$

Los intervalos de integración serán $(1, 2)$ y $(2, 3)$

$$S_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{48} + \frac{x}{2} \right]_1^2 = \frac{17}{48}$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{1}{x} \right]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48} u^2$$

9.3. Junio 2008 - Opción A

Problema 9.3.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
- (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array} \right), \quad |A| = -1 + a^2 = 0 \implies a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{-1 + a^2} = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{-1 + a^2} = -\frac{1}{a+1}$$

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 1$, mientras que $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$ ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, $\text{Rango}(A) = 1 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

b)

$$2 = -\frac{1}{a+1} \implies a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \implies x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\frac{3}{2}$.

Problema 9.3.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r , s según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4a = 0 \implies a = 0$$

Si $a \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{se cortan.}$$

b) Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, -1, 1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 3, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}u$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(0, 2, 2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Problema 9.3.3 (2 puntos) Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\left(\frac{4}{5} \right)^x + 1 \right)}{6^x \left(\left(\frac{3}{6} \right)^x + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^x \frac{\left(\frac{4}{5} \right)^x + 1}{\left(\frac{3}{6} \right)^x + 1} = 0$$

Problema 9.3.4 (2 puntos) Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x .

Solución:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \implies x = 1, \quad x = e^{-2}$$

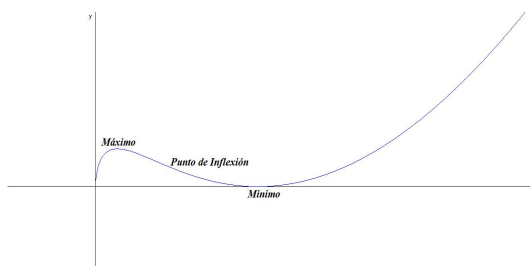
	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \implies x = e^{-1}$$

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



9.4. Junio 2008 - Opción B

Problema 9.4.1 (3 puntos) Dada la siguiente matriz de orden n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2 .
- (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3 .
- (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5 .

Solución:

a)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

b)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

c)

$$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

Problema 9.4.2 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

- b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

a)

$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \implies c^2x^4 + x^2 + c = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 10$, ya que el discriminante $1 - 4c^2 < 0$, esto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$S = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx \right| = \left| \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right|_0^1 = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

b)

$$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \implies c = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0, -\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

Problema 9.4.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

- (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .
- (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π .

Solución:

a) Construimos los vectores:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ A(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

c)

$$d(D, \pi) = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Problema 9.4.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .
- (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r .

c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY .

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

b)

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \implies \lambda = -1$$

Luego el punto buscado es el $Q(-2, 0, 4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r).

c) Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \implies y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

d) Construyo los vectores $\vec{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\vec{RP} = (1, 7, 3)$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{RQ} \times \vec{RP}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$

9.5. Septiembre 2008 - Opción A

Problema 9.5.1 (3 puntos) Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f , estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a) ■ Asíntotas:

a) Verticales: No Hay

b) Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) Oblicuas: No hay al haber horizontales

■ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \implies x = 1$$

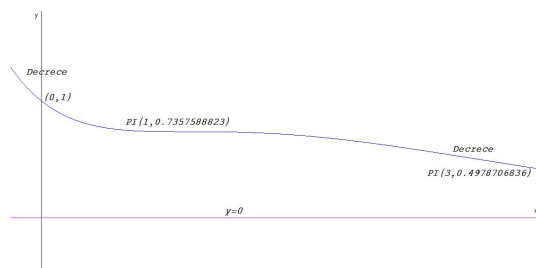
Además, $f'(x) \leq 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

■ Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x} = 0 \implies x = 1, x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

■ Representación:



b) Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \implies du = 2x dx$ y $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} dx = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int x e^{-x} dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \implies du = dx$ y $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} \right] = -e^{-x}(x^2 + 1) - 2x e^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 3) = -\frac{x^2 + 2x + 3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x} dx = -\frac{x^2 + 2x + 3}{e^x} \Big|_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Problema 9.5.2 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \implies a = -1, a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el $\text{Rango}(A) = 2$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies |A| \neq 0 \implies$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies |A| = 0 \implies$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 9.5.3 (2 puntos) Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R . Describir dicho conjunto de puntos.

- b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P, S) = 2\text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

Solución:

- a) Sea $R(x, y, z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \implies |(x-1, y-1, z-3)| = |(x, y-1, z)| \implies$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \implies x+3z-5=0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

- b) La recta

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{QP} = (1, 0, 3) \\ Q(0, 1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \implies S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \implies |(\lambda-1, 0, 3\lambda-3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2} \implies (\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2 + (3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1, 1, -1) \quad \text{y} \quad S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

Problema 9.5.4 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 3, 4) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$u_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 2, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 2, -1) \\ \vec{u}_s = (2, 3, 4) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ -1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + y - 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 11x + 2y - 7z - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + y - 2z + 2 = 0 \\ 11x + 2y - 7z - 2 = 0 \end{cases}$$

9.6. Septiembre 2008 - Opción B

Problema 9.6.1 (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x) dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x .

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)$$

Solución:

a) Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \implies du = \frac{dx}{x}$ y $dv = x^3 dx \implies v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

b) $x = e^t - e^{-t} \implies dx = (e^t + e^{-t})dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4+(e^t - e^{-t})^2}} dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}} dt =$$

$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}} dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt = \int dt = t = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right) + C$$

Problema 9.6.2 (3 puntos) Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .
- (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 , π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

- Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano: $1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda = 1 \implies \lambda = 1$, luego el punto buscado es: $P(3, 2, -4)$.

- Calculamos un punto $Q(1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -4\lambda)$ de la recta r que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto P calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(-2+2\lambda, -3+3\lambda, 4-4\lambda)| = \sqrt{4(\lambda-1)^2 + 9(\lambda-1)^2 + 16(1-\lambda)^2} =$$

$$\sqrt{29}(\lambda-1) = \sqrt{29} \implies \lambda = 2$$

Luego $Q(5, 5, -8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1 . Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 5 + 5 - 8 = 2 \implies \pi_2 : x + y + z = 2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1 - \lambda) = \sqrt{29} \implies \lambda = 0$$

Luego $Q(1, -1, -4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1 . Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 1 - 1 - 4 = -4 \implies \pi_2 : x + y + z = -4$$

Problema 9.6.3 (2 puntos) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & -2y & + z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & + z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & & +2z & = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz vemos que, la 1ª columna es igual a la 3ª, y la segunda es igual a la 4ª multiplicada por dos, luego el $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < 4$ n° de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4 - 2 = 2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \frac{4 - 3\mu}{2} \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{cases}$$

Problema 9.6.4 (2 puntos) El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x : nº de billetes de 50 euros

y : nº de billetes de 20 euros

z : nº de billetes de 10 euros

$$\left\{ \begin{array}{l} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array} \right.$$

Capítulo 10

Año 2009

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 (3 puntos) Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π , se pide:

- (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r .
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π , que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r .
- (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t . Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P , y R es un punto cualquiera de s , probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r .

Solución:

- De dos formas diferentes:

■ La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$, y

si sustituimos en el plano π tenemos:

$$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \implies 2 = 2$$

expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π .

- Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \implies 2x - z = 1$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \implies x - 2y = -1$$

Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} x+ & 2y- & z = & 2 \\ x- & 2y & & -1 \\ 2x & & - & z = 1 \end{array} \right\} \implies \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

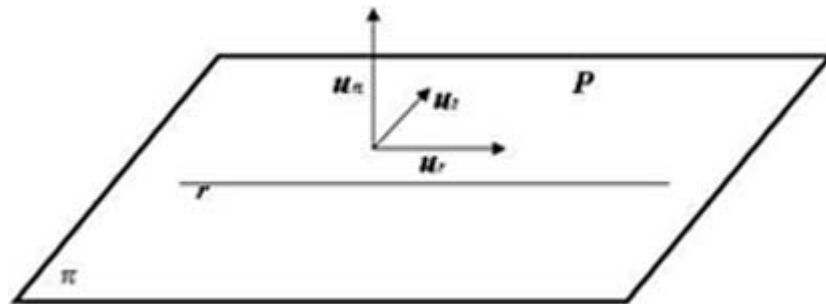
$$\left. \begin{array}{l} |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -4 \implies \text{Rango}(A) = 2 \\ F_3 = F_1 + F_2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \end{array} \right\} \implies$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

- b) Para que el enunciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π , basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

El vector $\vec{u}_t$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular



al vector característico del plano $\vec{u}_\pi = (1, 2, -1)$ y al vector director $\vec{u}_r = (2, 1, 4)$ de la recta r . Luego:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(3, -2, -1)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \implies t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

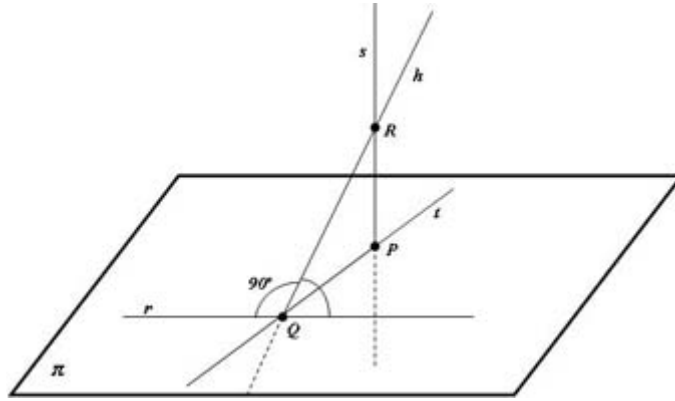
Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π .

c) La situación geométrica es la siguiente:

Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2 + \lambda, 3 + 2\lambda, 2 - \lambda)$.



Ahora busquemos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x = -2 + 3\mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \implies \begin{cases} 3 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ 2 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 5 + 4\lambda = 2 - \mu \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \implies Q(1, 1, 1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3 + \lambda, 2 + 2\lambda, 1 - \lambda)$ y $\vec{u}_r = (2, 1, 4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u}_r = (-3 + \lambda, 2 + 2\lambda, 1 - \lambda) \cdot (2, 1, 4) = -6 + 2\lambda + 2 + 2\lambda + 4 - 4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s .

Problema 10.1.2 (3 puntos) Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
- b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
- c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

- a) (1 punto) Continuidad:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (3/2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) = \frac{7}{16} \\ \lim_{x \rightarrow (3/2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (3/2)} \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) = \frac{7}{16} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \implies$$

f es continua en $x = \frac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{-7(x-2)}{6} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

b) Estudiamos su representación gráfica

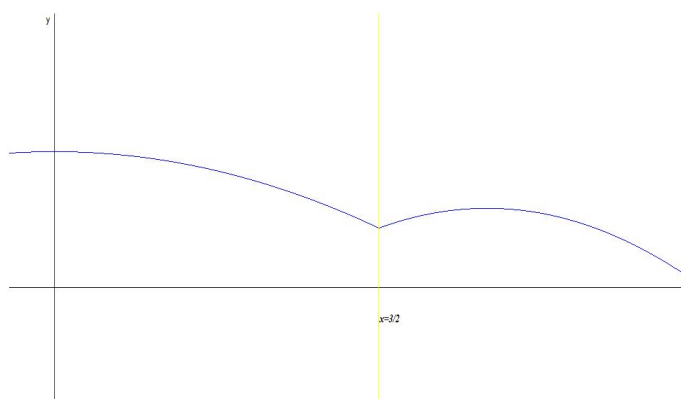
Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} = 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ x = 2 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Recurrimos a la segunda derivada para ver de que tipo son

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Máximo} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{6} \Rightarrow \text{Máximo} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
$3/2$	$7/16$
2	$7/12$



Problema 10.1.3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases}$$

- (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
- (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{array} \right)$$

$$|\overline{A}| = 3(k-1) = 0 \implies k = 1$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies$ el Rango(A) = 2 independientemente del valor de k .

Si $k \neq 1 \implies |\overline{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{array} \right), \quad |\overline{A}| = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

b)

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Problema 10.1.4 (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = (x + 1)(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & x + 1 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ x - 1 & 1 & x + 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x + 1)^2(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & 1 \\ x - 1 & x + 1 & 1 \\ x - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = (x + 1)^2(x - 1) \begin{vmatrix} 2(x - 1) & 1 & 1 \\ -(x - 1) & x & 0 \\ -(x - 1) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(x + 1)^2(x - 1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(x^2 - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = x(x^2 - 1)^2 = 0 \implies x = \pm 1$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 (3 puntos) Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

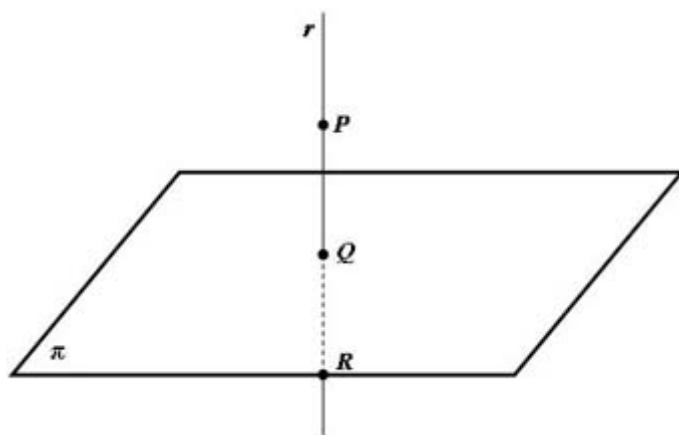
- (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P . Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π .
- (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

a) Tenemos

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, -1, 1) \\ P_r = P(1, -1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) + (2 + \lambda) - 11 = 0 \implies \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3, -2, 3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q = \frac{P + R}{2} \implies R = 2Q - P = 2(3, -2, 3) - (1, -1, 2) = (5, -3, 4)$$

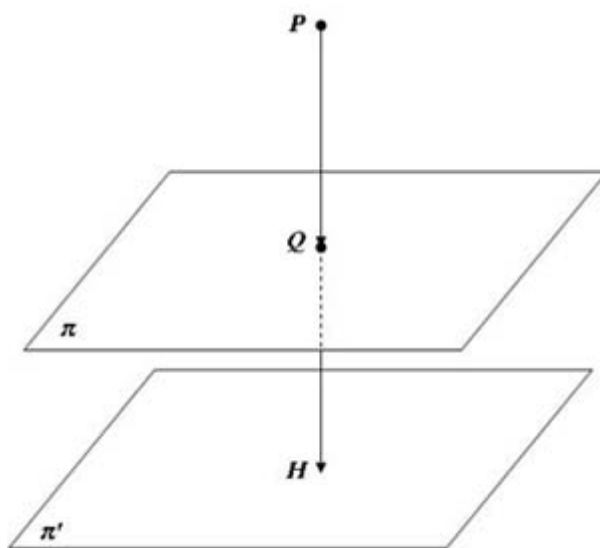
Luego $R(5, -3, 4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π .

b) El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \vec{u}_\pi$ y es perpendicular al plano π . Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \vec{u}_\pi \implies \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \vec{u}_\pi \implies$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda |\vec{u}_\pi| = \lambda \sqrt{6} = 5\sqrt{6} \implies \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \implies 22 + 6 + 7 = \lambda \implies \lambda = 35 \implies 2x - y + z = 35$$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 10.2.2 (3 puntos) Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3 , y se sabe que $\det(A) = 4$, se pide:

- (1 punto) Calcular $\det(A^3)$ y $\det(3A)$.
- (2 puntos) Calcular $\det(B)$ y $\det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

- a) ■ $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$
 ■ $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$
- b) ■ $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$
 $= -10[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)] = 10|A| = 40$
 ■ Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \implies |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \implies |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{40}$

Problema 10.2.3 (2 puntos) Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$
$$f(0) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \implies$$

f es continua en $x = 0$

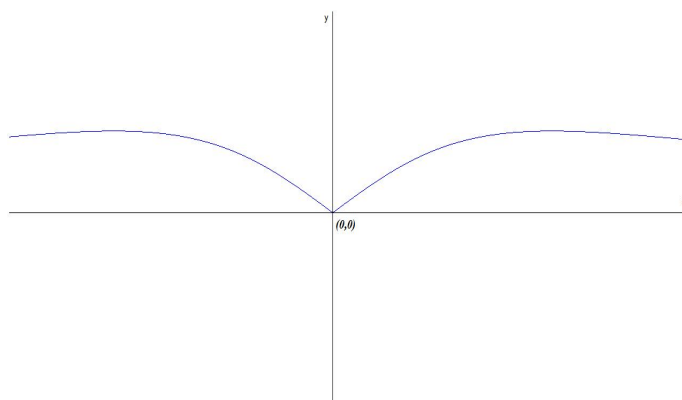
Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$



- b) Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1, 1)$ y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 10.2.4 (3 puntos) Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x . Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

- Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \implies$$

f es continua en $x = 1$

- Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x = e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

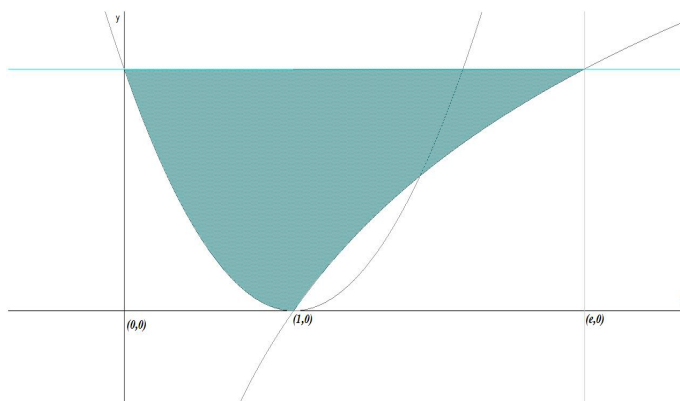
$$S_1 = \int_0^1 (1 - (x-1)^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \implies |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \implies u' = dx/x$ y $dv = dx \implies v = x$

$$\int (1 - \ln x) dx = x - \left(x \ln x - \int dx \right) = 2x - x \ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1 - \ln x) dx = [2x - x \ln x]_1^e = e - 2 \implies |S_2| = e - 2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3}$$



10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

- (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π .
- (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

- c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

- a) Tres pasos:

- Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0, 0, 0)$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Calculo el punto de corte Q de π con r :

$$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \implies \lambda = \frac{4}{11} \implies Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

- P es el punto simétrico de O respecto de Q :

$$\frac{P + O}{2} = Q \implies P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

- b)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

- c) Si $y = 0$, $z = 0 \implies A(4, 0, 0)$
 Si $x = 0$, $z = 0 \implies B(0, 4/3, 0)$
 Si $x = 0$, $y = 0 \implies C(0, 0, 4)$

$$\vec{OA} = (4, 0, 0), \quad \vec{OB} = (0, 4/3, 0), \quad \vec{OC} = (0, 0, 4)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{32}{9} u^2$$

Problema 10.3.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases},$$

Se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
 b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \implies \lambda = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1}{5}$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 1/5 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$$\text{Como } |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

Como

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right| = -18 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 1/5$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 4x- & 4y+ & 2z = & -2 \\ -x+ & y+ & z = & -1 \\ -4x- & 4y- & z = & 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 10.3.3 (2 puntos) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)$$

Si $\alpha = 0 \implies \lambda = \frac{1}{4} \implies$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \implies \lambda = 0 \implies$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 10.3.4 (2 puntos) Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$(u = t^2 \implies du = 2t dt; \quad dv = e^{-t} dt \implies v = -e^{-t})$$

$$\int t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt =$$

$$(u = t \implies du = dt; \quad dv = e^{-t} dt \implies v = -e^{-t})$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2 \left[-t e^{-t} + \int e^{-t} dt \right] = -t^2 e^{-t} + 2 \left[-t e^{-t} - e^{-t} \right] = -e^{-t} (t^2 + 2t + 2)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt = -e^{-t} (t^2 + 2t + 2) \Big|_0^x = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + 2$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
- (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s .
- (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-2, 0, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 2z - 1 = 0$$

b) $\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, 2)$:

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-14| = 14$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(2, 0, -4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} u$$

c)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 3, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-2, 0, 2) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_t P_s} = (-2, 0, 2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \implies \text{Se cruzan}$$

Problema 10.4.2 (3 puntos) Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

- (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
- (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

a)

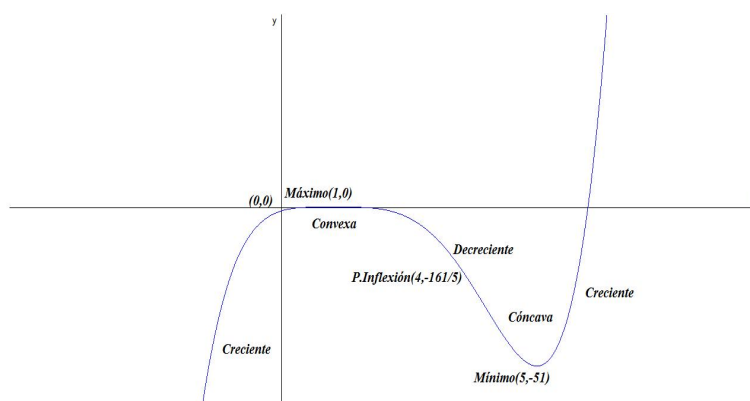
	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

- b) En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x-4)(x-1)^2$$

$f''(x) = 0 \implies x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	Convexa ∩	Convexa ∩	Cóncava ∪



c)

$$f(x) = \int [x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5] dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \implies C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

Problema 10.4.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \implies \lambda = 2 \quad \lambda = 6$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \implies |\overline{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Determinado.

b) Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 \\ y = -14 \end{cases}$$

Problema 10.4.4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a .
- b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

a) $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \implies a = 1, a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
- b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
- c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M .

Solución:

a) $|M| = 2m(m-1) = 0 \implies m = 0, m = 1.$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \implies$ existe M^{-1} .

Si $m = 0$ o $m = 1 \implies$ no existe M^{-1} .

b) M^{25} no es invertible si $|M^{25}| = 0 \implies |M|^{25} = 0 \implies |M| = 0$. Luego M^{25} es invertible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

c)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 10.5.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
- b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2}$$

Si $a \neq b$ este límite no tiene solución, por tanto continuamos con la condición de que $a = b$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2x}{2x + 2ax^2} = -\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} \implies a = b = \pm 1$$

b) Si $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } 1+x > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La definición de derivada en el punto 0 es

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(0+h) = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}, \quad f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h + h^2}{2h^3} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 + 2h}{6h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h}{6h + 6h^2} = \left[\frac{1}{0} \right] = \pm\infty$$

Luego no es derivable en el punto $x = 0$.

Problema 10.5.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a , b para los cuales las rectas r , s se cortan perpendicularmente.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, a) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (b, 1, -1) \\ P_s(3, 0, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 0, 3)$$

Si r y s son perpendiculares:

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_s \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \implies -a + b = -2$$

Si r y s se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies a + 2b = -1$$

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ ab + 2b = -1 \end{cases}$$

Problema 10.5.4 (2 puntos) Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

Solución:

La ecuación de un plano paralelo a π es $\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0$ y un plano del plano π puede ser $P(0, 1, 0)$ y tendremos que $d(P, \pi') = 3$:

$$d(P, \pi') = \frac{|0 - 1 + 0 + \lambda|}{3} = \frac{|\lambda - 1|}{3} = 3 \implies |\lambda - 1| = 9$$

$$\begin{cases} -\lambda + 1 = 9 \implies \lambda = -8 \implies \pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \lambda - 1 = 9 \implies \lambda = 10 \implies \pi' : 2x - y + 2z + 10 = 0 \end{cases}$$

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 (3 puntos)

a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

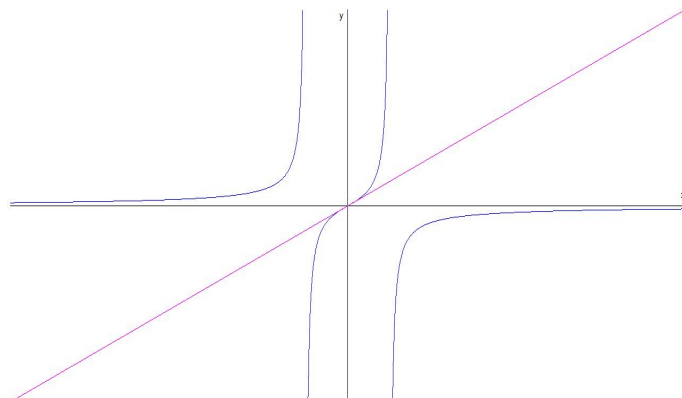
Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = 1$:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1 \implies x^4 - 3x^2 = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Los puntos serán: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/8)$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/8)$

b) En $x = 0$ la recta tangente es $y = x$



c) Se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 2]$ y por tanto $\exists c \in [0, 2]$ que cumple

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Problema 10.6.2 (3 puntos) Dada la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta r y el plano π , para ello calculamos la ecuación paramétrica de la recta y sustituimos en el plano:

$$r; \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies (1 + \lambda) - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \implies$$

$$\lambda = 1 \implies P(2, -1, 1)$$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P_r(1, 0, 0)$ respecto al plano π :

- Calculamos una recta t perpendicular π que pase por P_r :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, -2) \\ P_t(1, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

- Encontramos el punto de corte de t y π :

$$(1 + \lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies P''\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Calculamos el punto simétrico P' de P_r respecto de P'' :

$$\frac{P_r + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P_r =$$

$$2\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La recta s simétrica de r respecto de π pasa por los puntos P y P' :

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{P'P} = (2, -1, 1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(5, -1, -1) \\ P(2, -1, 1) \end{cases} \implies$$

$$t : \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Problema 10.6.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

- (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

- (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo

-

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \quad \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = n^\circ$ incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado y la única solución es la trivial.

$$x = y = z = 0$$

- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5 \implies |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$ luego en este caso el sistema será Compatible Indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

b) Cuando $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 10.6.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución:

$$\begin{aligned} AXB = A + B &\implies X = A^{-1}(A + B)B^{-1} \\ A + B &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} \\ X &= A^{-1}(A + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &\quad \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.7.1 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

- a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r , s se cortan en un punto.
- b) (1 punto) Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r , s .
- c) (1 punto) Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s .

Solución:

a)

$$\begin{cases} 1+2\alpha = -2+\mu \\ -2+3\alpha = 1+2\mu \\ 2+\alpha = \lambda+2\mu \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -9 \\ \mu = -15 \\ \lambda = 23 \end{cases} \implies \lambda = 23$$

b) Sustituyendo los valores de λ , α y $\mu \implies P(-17, -29, -7)$

c)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 2) \\ P_r(1, -2, 2) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 3 & 2 & y+2 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : 4x-3y+z-12=0$$

Problema 10.7.2 (3 puntos) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

- a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.
- b) (1 punto) $g(x) = \cos \frac{\pi}{8}$.
- c) (1 punto) $h(x) = \int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t} dt$.

Solución:

- a) $f'(x) = 3(2x)^{3x}(1 + \ln(2x))$
- b) $g'(x) = 0$
- c)

$$s(x) = \int_{5\pi}^x e^{\cos t} dt \implies s'(x) = e^{\cos x}$$

$$h(x) = s(6x) \implies h'(x) = 6e^{\cos x}$$

Problema 10.7.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.
- b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

Añadimos una tercera ecuación:

$$\begin{cases} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \\ ax + by + cz = d \end{cases} \implies \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 0 & 2 & 2\sqrt{5} \\ a & b & c & d \end{array} \right) \implies |A| = -2a - 4b + 3c$$

- a) Para que sea compatible determinado $|A| \neq 0$ y una solución posible puede ser $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$.
- b) Para que sea compatible indeterminado $|A| = 0$, es decir, la fila $F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2$:

$$\begin{cases} a = 2\alpha + 3\beta \\ b = -\alpha \\ c = 2\beta \\ d = \alpha\sqrt{3} + \beta 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Bastaría tomar cualquier $\alpha \neq 0$ o cualquier $\beta \neq 0$, por ejemplo, si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 1$ tenemos:

$$a = 3, b = 0, c = 2 \text{ y } d = 2\sqrt{5}$$

Problema 10.7.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Solución:

$$XB = A + B \implies X = (A + B)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

10.8. Septiembre 2009 - Opción B (Reserva)

Problema 10.8.1 (3 puntos) Se pide:

- a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1 , v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\vec{w}$

- b) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v}_1(1, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\vec{v}_3$ tal que:

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2.$$

- c) (1 punto) Dado el vector $\vec{v}(1, 2, 3)$, hallar los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

- $\vec{v}_1$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;
- $\vec{v}_1$ es perpendicular a $\vec{v}_2$;
- $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \\ \vec{v}_1 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \vec{v}_3 + \vec{v}_3 \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \vec{v}_3 &= |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2 \end{aligned}$$

- b) $\vec{v}_1 \vec{v}_2 = 0 \implies \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ y llamamos $\vec{v}_3 = (a, b, c)$:

$$\begin{cases} \vec{v}_3 \vec{v}_1 = a + b - c = 0 \\ \vec{v}_3 \vec{v}_2 = a + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$$

$\vec{v}_3 = a(1, -2, -1)$ donde a es cualquier valor real.

- c) Sea $\vec{v}_1 = (a, a, a)$ y $\vec{v}_2 = (b, c, d)$:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \vec{v}_2 = a(b + c + d) = 0 \implies b + c + d = 0 \\ \vec{v} = (1, 2, 3) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a + b, a + c, a + d) \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ a + b = 1 \\ a + c = 2 \\ a + d = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$\vec{v}_1 = (2, 2, 2) \text{ y } \vec{v}_2 = (-1, 0, 1)$$

Problema 10.8.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + (m+1)y + z = m \\ x + y + (m+1)z = m^2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m .
- (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & (m+1) & 1 & m \\ 1 & 1 & (m+1) & m^2 \end{array} \right)$$

$$|A| = m^2(m+3) = 0 \implies m = 0 \quad m = -3$$

- Si $m \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ incógnitas
luego en este caso el sistema será Compatible Determinado.
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 1 < \text{n}^\circ$ de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3$, y el sistema es incompatible. Los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

- Cuando $m = 0 \implies x + y + z = 0$:

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Problema 10.8.3 (2 puntos) Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x) + V(y)$ si $x + y = 5$.

Solución:

$$f(x) = V(x) + V(y) = x^3 + y^3, \quad y = 5 - x \implies f(x) = x^3 + (5 - x)^3 \implies$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(5 - x)^2 = 30x - 75 = 0 \implies x = \frac{5}{2}$$

$$f''(x) = 30 \implies f''\left(\frac{5}{2}\right) = 30 > 0 \implies \text{Mínimo}$$

Sustituyendo en $f(x)$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} = 31,25 \text{ cm}^3$$

Problema 10.8.4 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int (2x + 1)^3 dx, \int x^3 e^{x^4} dx$

b) (1 punto) $\int 2^x dx, \int \frac{1 + x + x^4}{x^3} dx$

Solución:

a) $\int (2x + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x + 1)^3 dx = \frac{(2x + 1)^4}{8} + C$

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 e^{x^4} dx = \frac{e^{x^4}}{4} + C$$

b) $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \int \ln 2 \cdot 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$$\int \frac{1 + x + x^4}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C$$

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

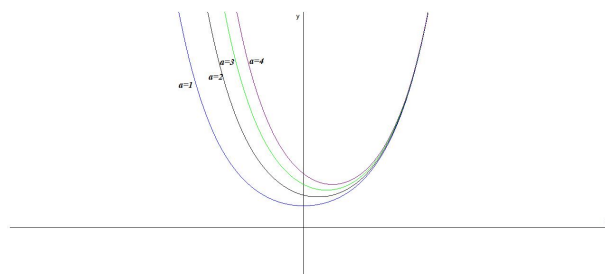
siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

$$a) \quad f'(x) = e^x - a e^{-x} = 0 \implies x = \frac{\ln a}{2}$$

- Si $a > 0$:

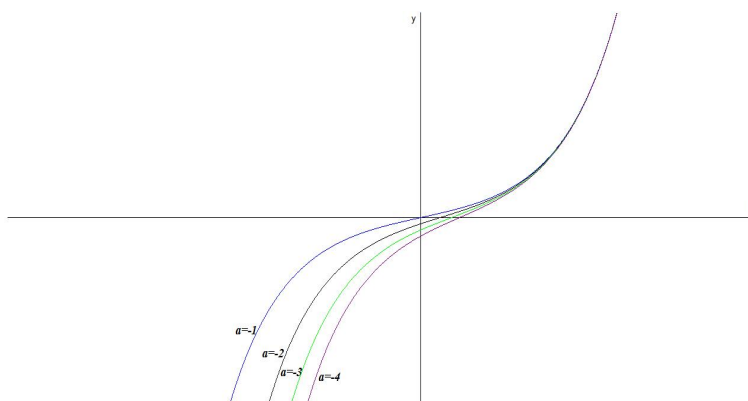


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

- Si $a \leq 0 \implies \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies$ la función es siempre creciente.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty$$

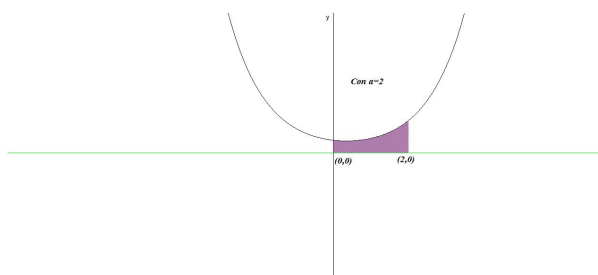
En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a .
Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + a e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$.

Si $a = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En este caso hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) Con $a > 0$:



$$S = \int_0^2 (e^x + a e^{-x}) dx = [e^x - a e^{-x}]_0^2 = a(1 - e^{-2}) + e^2 - 1$$

Problema 11.1.2 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

- a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s , y que contiene al origen de coordenadas.
- b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{cases}$$

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{OP}_r = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, 1) \\ \vec{OP}_s = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

b) $\vec{P_r P_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \right| = 64 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Problema 11.1.3 (2 puntos) Obtener, para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 11.1.4 (2 puntos) Discutir razonadamente, en función del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k + 1) \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array} \right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$$

■ Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

■ Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $k = -2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Indeterminado.

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

- $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \implies m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

$$y = 2(x + 1) \implies 2x - y + 2 = 0$$

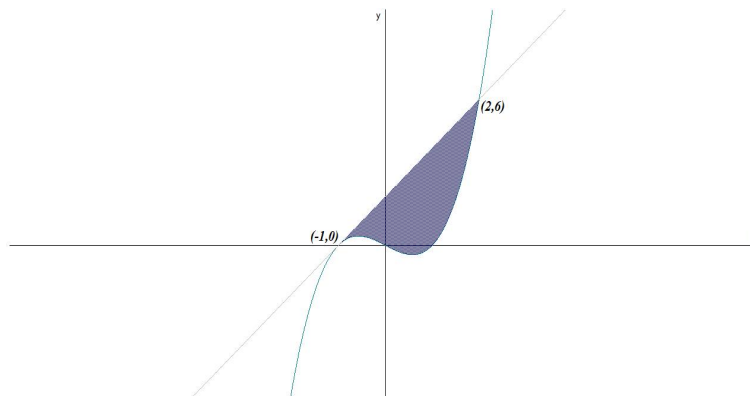
- Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \implies x = -1, \quad x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

-

$$S = \int_{-1}^2 (2x+2-x^3+x) dx = \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{4}$$



Problema 11.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

- (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
- (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
- (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -1 \quad \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- b) El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x+ & 2y- & z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c)

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x- & 2y- & z = 4 \\ 2x- & y- & z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 11.2.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B .

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2 - \lambda, 1 + 2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2 - 3\lambda, 2 - \lambda, 3 + 2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{(2 - 3\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2} \Rightarrow$$

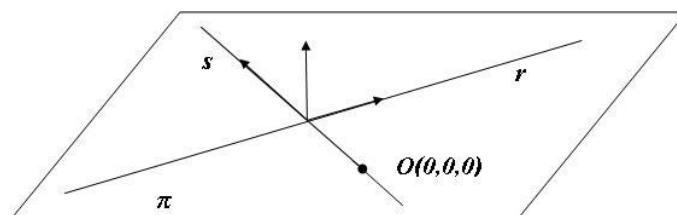
$$\lambda = 1 \Rightarrow (5, -1, 6)$$

Problema 11.2.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r , y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

Solución:



$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1, 1, -1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

11.3. General-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

$$a) f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

$$b) f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

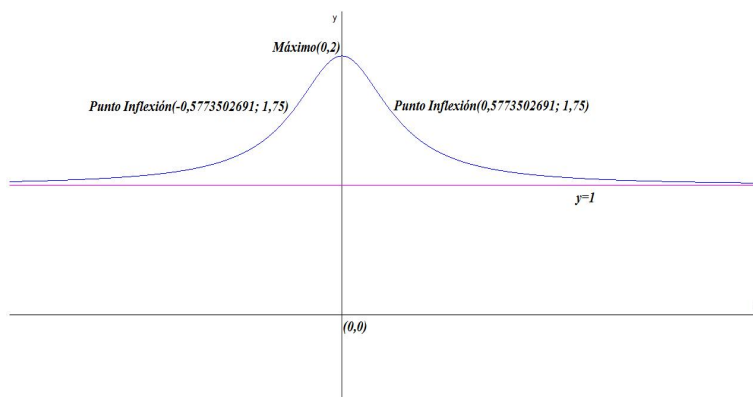
La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$

c) Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 \implies y = 1$$

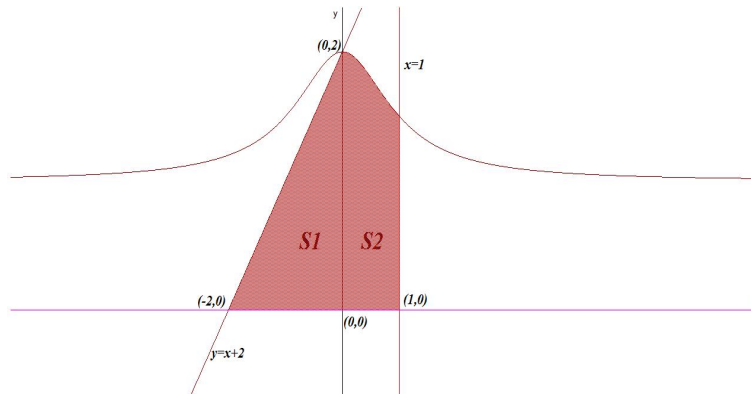
y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



$$d) S1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ y } S2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx:$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \arctan x + x \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4 + \pi}{4}$$

$$\text{Área} = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12 + \pi}{4} u^2$$



Problema 11.3.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s
- (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13, -9, -1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \implies 12x + 11y + 57z + 217 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 35x + 53y - 22z = 0$$

$$t : \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, 1, -4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = -5 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |(13, -9, -1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251} u$$

Problema 11.3.3 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- (1 punto) Resolverlo para el caso de $k = 3$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix} \quad |A| = -2k^2 + k + 15 = 0 \implies k = 3 \quad k = -5/2$$

- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x = y = z = 0$
- Si $k = 3$ o $k = -5/2 \implies |A| = 0 \implies$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

b) Si $k = 3$:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{4}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 11.3.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$A^2 = -A + 3I$$

$$b) A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$$

$$A^3 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A + 3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

11.4. General-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

- a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.
- b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2 \sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

b) Si $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$. Si $f(x) = 0 \implies \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0 \implies x = 0, x = 1 \implies (0, 0)$ y $(1, 0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0, 0)$.

c) Se pide la tangente en la rama $x > 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) 2^x - \sqrt{x} \ln x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Problema 11.4.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a .

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \implies a = 0 \quad a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $a = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible.

- b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Problema 11.4.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

Solución:

- a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -2, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$$

$\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 3, 1) \implies$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 3, 1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x-4y-3z+1=0$$

b)

$$\overrightarrow{P_s A} = (-3, -3, -1)$$

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s A}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(5, -4, -3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = |(-1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s A}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$$

Problema 11.4.4 (2 puntos) Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, 3) \end{cases} \implies V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 u^3$$

b) Calculamos el plano π :

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 6x+3y+2z-6=0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta r que pasa por $O(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte O' de r con π :

$$6(6\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) - 6 = 0 \implies \lambda = \frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O' \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49} \right)$$

- El punto O' es el punto medio entre los puntos O y el que buscamos O'' :

$$\frac{O + O''}{2} = O' \implies O'' = 2O' - O = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$$

11.5. Específica-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.5.1 (3 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \right|^4 = \left| \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \right|^4 = 2^4 \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \right|^4 = 6^4$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} +$$

$$4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$$

Problema 11.5.2 (3 puntos) Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
- (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 3) \\ P_r(-1, 2, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P} = (3, -2, 0) \quad r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

$$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(6, 9, 1)| = \sqrt{118}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}} u$$

b) Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

- Calculo un plano π perpendicular a r que contenga a P :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (-2, 1, 3) \\ P(2, 0, -1) \end{cases} \implies -2x + y + 3z + \lambda = 0$$

$$\implies -4 - 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = 7 \implies 2x - y - 3z - 7 = 0$$

- Calculo el punto de corte P'' de este plano π con r :

$$2(-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3(-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \implies \lambda = -\frac{4}{7}$$

$$P'' \left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{19}{7} \right)$$

- El punto P'' es el punto medio entre P y P' :

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = \left(\frac{2}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{38}{7}\right) - (2, 0, -1)$$

$$P'' \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$$

Problema 11.5.3 (2 puntos) Hallar:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x} \right]^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lambda \implies \ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + 4x^3)}{x^3} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24}{3(1 + 4x^3)} = 8 \implies \lambda = e^8$$

Problema 11.5.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
- (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

- Hay que estudiar la inecuación: $x^2 + 4x - 5 > 0$.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \implies x = -5, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	+	-	+

Luego $\text{Dom}(f) = (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. Las asíntotas verticales son:

■ $x = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}$$

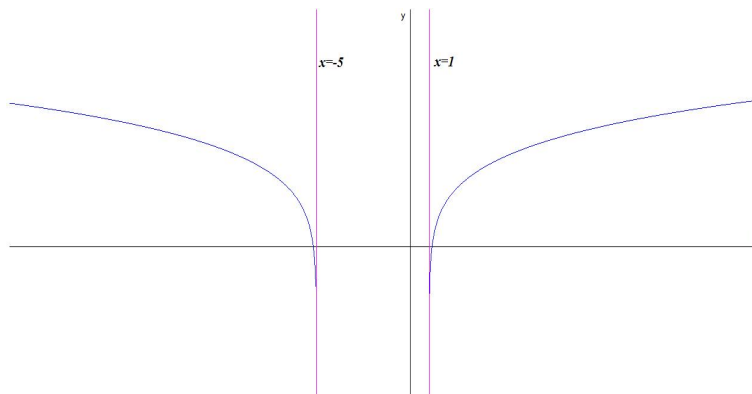
■ $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty$$

b) $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow x = -2$ Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	—	+	—	+
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -5)$ y creciente en el $(1, \infty)$.



11.6. Específica-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.6.1 (3 puntos) Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

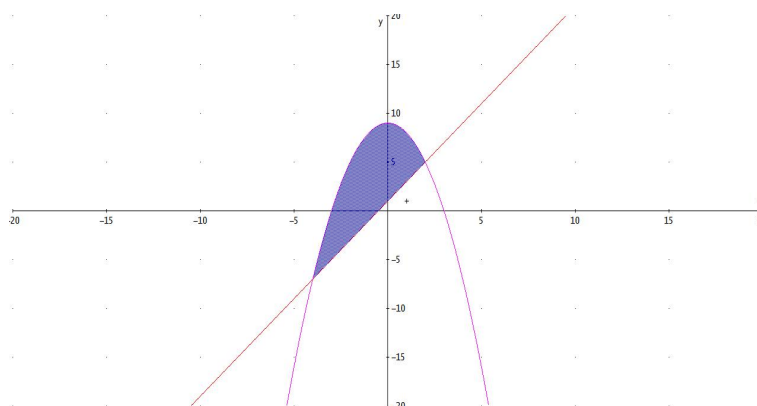
se pide:

- (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

- c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX .

Solución:

- a) La función $f(x) = 9 - x^2$ tiene los puntos de corte con los ejes: $(0, 9)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, presenta un máximo en $(0, 9)$ y es una función par (simétrica respecto a OY). La función $g(x) = 2x + 1$ es una recta que pasa por los puntos: $(0, 1)$ y $(-1/2, 0)$

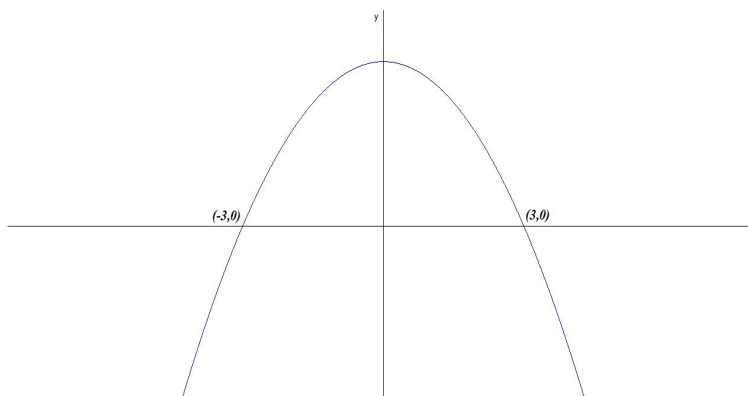


- b) Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \implies x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^2 (9 - x^2 - 2x - 1) dx = \int_{-4}^2 (-x^2 - 2x + 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right]_{-4}^2 = 36 \text{ u}^2$$

- c) Dibujamos $y = 9 - x^2$ y por simetría podemos hacer:



$$V = 2\pi \int_{-3}^3 (9-x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^3 (81+x^4-18x^2) dx = 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3 \Big|_0^3 = \frac{1296\pi}{5} u^3$$

Problema 11.6.2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π .
- (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π .
- (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (2, a, 4)$$

- Si r está contenida en el plano $\pi \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$:

$$2 + 2a + 20 = 0 \implies a = -11$$

- Si $a = -2 \implies \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$ y sea s la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$:

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta sería $P(-3/2 + \lambda, -\lambda, -11/2 + 2\lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|-3 + 2\lambda + 2\lambda - 22 + 8\lambda + 25|}{\sqrt{4 + 4 + 16}} = \sqrt{6} \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = 1, \quad \lambda = -1$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \implies \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Si } \lambda = -1 \implies \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$$

- El ángulo α que forma r y π es $90^\circ - \widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi} \implies \sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi})$

$$\sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi}) = \frac{1 - 2 + 10}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Problema 11.6.3 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m .
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \implies m = -\frac{3}{2}$$

- Si $m \neq -3/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = -3/2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

b) Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + y + z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 11.6.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a$$

Si $a = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ la matriz no tiene inversa.

Si $a \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ la matriz sí tiene inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$

11.7. General-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.7.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m
- b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

a)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

Si $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

b) Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} -x+ & y+ & & t = & 0 \\ x- & y+ & & t = & 0 \\ x+ & y+ & 2z- & t = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & -\lambda \\ y = & -\lambda \\ z = & \lambda \\ t = & 0 \end{cases}$$

Problema 11.7.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 .

Solución:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{ur_1} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{ur_2} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases}$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Se obtiene la recta t perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{ur_1} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies y + z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{ur_2} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

b)

$$d(\overrightarrow{ur_1}, \overrightarrow{ur_2}) = \frac{[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{ur_1}, \overrightarrow{ur_2}]}{|\overrightarrow{ur_1} \times \overrightarrow{ur_2}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, 1, 3), \quad |\overrightarrow{ur_1} \times \overrightarrow{ur_2}| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}$$

$$[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{ur_1}, \overrightarrow{ur_2}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Problema 11.7.3 (2 puntos) Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x} = \lambda \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \ln \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+x^2}}{1 + \arctan x} = a = \ln \lambda \implies \lambda = e^a$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2e^x}{7 + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

Problema 11.7.4 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b) (1 punto). $\int_0^\pi x \cos x dx$

Solución:

a)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(4-x^2)^{-1/2} dx = -\sqrt{4-x^2} \Big|_0^1 = 2 - \sqrt{3}$$

b) $\int_0^\pi x \cos x dx$ se resuelve por partes $u = x$ y $dv = \cos x dx \implies du = dx$
y $v = \sin x$:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^\pi x \cos x dx = x \sin x + \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

11.8. General-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.8.1 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .

- c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

Solución:

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y - 2 \\ 6 & b & z - 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

- a) π_1 y π_2 son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \implies b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

- b)

$$t : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

- c) $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x, y, z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \implies \begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \implies \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \implies \text{no tiene solución} \end{cases}$$

Problema 11.8.2 (3 puntos) Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución:

$\overrightarrow{AP} = (1 - a, 2, 1)$ y $\overrightarrow{AQ} = (2 - a, 1, 1)$ y como punto elijo el $A(a, 0, 0)$:

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 - a & 2 - a & x - a \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y + (a - 3)z - a = 0$$

Punto de corte de π con OY : hacemos $x = 0$ e $z = 0 \implies B(0, a, 0)$.

Punto de corte de π con OZ : hacemos $x = 0$ e $y = 0 \implies C(0, 0, a/(a - 3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, a, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a-3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a-3) \end{vmatrix} \right| = \frac{a^3}{6a-18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a-9)}{6(a-3)^2} = 0 \implies a = 0, \quad a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

	$(-\infty, 9/2)$	$(9/2, \infty)$	$\implies$ Mínimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{8}\right)$
$V'(a)$	-	+	
$V(a)$	decrece	crece	

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \quad B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \quad C(0, 0, 3)$$

Problema 11.8.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \implies$$

$\text{Rango } \overline{A} = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, luego el sistema es compatible indeterminado.

- b) Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{Rango} \overline{A} = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

- c) Se elige una ecuación de forma que los términos en x , y y z dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{Rango} \overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

Problema 11.8.4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \Rightarrow$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11.9. Específica-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.9.1 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s .

Solución:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, -1), \quad P_s(0, -2, -3)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$$

Vamos a encontrar la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, 1, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 5 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : x - 6y + z + 8 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0, -3, -1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ -1 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : 2x - y + 3z + 7 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 6y + z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

Problema 11.9.2 (3 puntos) El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ sea cual sea el valor de a , luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array} \right)$$

$$|A_1| = |C_1 C_2 C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1 C_2 C_4| = 2b + 5 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1 C_3 C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2 C_3 C_4| = -2b - 5 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es incompatible para cualquier valor distinto de $-5/2$.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos que $\text{Rango}(A) = 2$, luego tenemos que encontrar c de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa forma $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Tendremos $F_2 = mF_1 + nF_3$:

$$(0, 2, 0, c) = m(1, 0, 1, 0) + n(4, 5, 4, 10) \Rightarrow \begin{cases} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{cases} \Rightarrow c = 4$$

Es decir cuando $c = 4$ tenemos que $F_2 = -8/5F_1 + 2/5F_3$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 11.9.3 (2 puntos) Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^2) \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6ax^2}{x^2 + 3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \Rightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Rightarrow -6a = \ln 4 \Rightarrow a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Problema 11.9.4 (2 puntos) Hallar:

a) (0,5 puntos). $\int_{14}^{16} (x-15)^8 dx$

b) (1,5 puntos). $\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx$

Solución:

a) $\int_{14}^{16} (x-15)^8 dx = \left. \frac{(x-15)^9}{9} \right]_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

b) $\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx$ se resuelve por partes: $u = x-9 \implies du = dx$
y $dv = (x-10)^{19}dx \implies v = \frac{(x-10)^{20}}{20}$

$$\begin{aligned} \int (x-10)^{19}(x-9) dx &= \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \int (x-10)^{20} dx = \\ &= \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} + C \\ \int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx &= \left. \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} \right]_9^{11} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

11.10. Específica-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.10.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k .

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1, k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \text{ y } \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Rightarrow$
 $\text{Rango}(A) = 2$. Por tanto, $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Claramente $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 1 < n^\circ$ de incógnitas y se trata de un sistema compatible indeterminado.

- b) Si $k = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Problema 11.10.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
- (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Solución:

- a) Asíntotas:

- Verticales: $x = -5$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[\frac{30}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[\frac{30}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \implies y = 3x - 10$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + 5x} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x \right) = -10$$

b) Estudio completo:

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2} = 0 \implies x = -5 + \sqrt{10}, \quad x = -5 - \sqrt{10}$$

	$(-\infty, -5 - \sqrt{10})$	$(-5 - \sqrt{10}, -5 + \sqrt{10})$	$(-5 + \sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto $(-8, 16; -43, 97)$ y un Mínimo en el punto $(-1, 84; -6, 03)$.

- Curvatura: $f''(x) = \frac{60}{(x + 5)^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

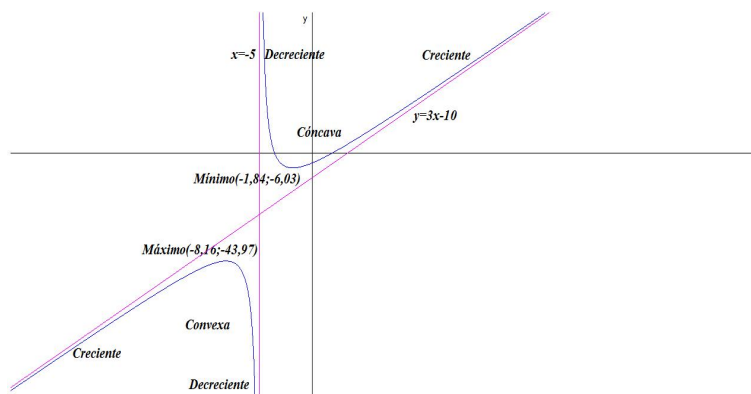
c) Representación gráfica:

Problema 11.10.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad s : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

Se pide:

- (1 punto). Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B , sea paralela a s .
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .



Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (a - 1, 3, -2) \\ P_t(1, 0, -1) \end{cases} \quad y \quad t \parallel s \implies \lambda \vec{u}_t = \vec{u}_s$$

$$\lambda(a - 1, 3, -2) = (1, -3, 2) \implies a = 0, \quad \lambda = -1$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x - 1 \\ 1 & -3 & y - 1 \\ 5 & 2 & z - 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

Problema 11.10.4 (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

Solución:

$$\vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_1}, \quad \vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_2} \implies \vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2}$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17)$$

El plano buscado tiene de ecuación $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $(0, 0, 0) \implies \lambda = 0$. Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$

Capítulo 12

Año 2011

12.1. Modelo 2011 - Opción A

Problema 12.1.1 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x + & \lambda y - & z = & 1 \\ x + & 3y + & z = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
- b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

b)

$$\begin{cases} x & + & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Problema 12.1.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.
- (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

- Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \implies x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	—	+	—
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función presenta un Máximo en el punto $\left(3, \frac{1}{8}\right)$. En el punto $x = -1$ la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

- Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0} \right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales
- Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $[0, 3]$:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \implies x = 1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

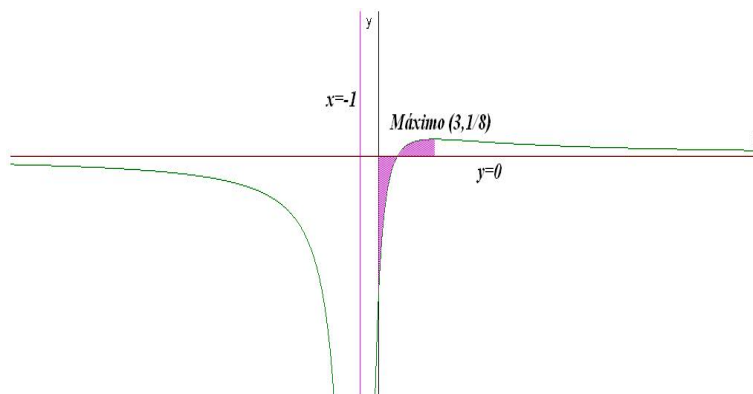
$$x-1 = A(x+1) + B \implies \begin{cases} x = -1 \implies B = -2 \\ x = 0 \implies -1 = A + B \implies A = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = F(1) - F(0) = \ln 2 - 1$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = F(3) - F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$



Problema 12.1.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s .

- b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(5, 4, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 4, 1)$$

a) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y $\text{Rango}\left(\begin{matrix} \overrightarrow{P_r P_s} \\ \vec{u}_s \end{matrix}\right) = 2 \implies$ las rectas r y s son paralelas.

b)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 4, 1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 6 & x+1 \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Problema 12.1.4 (2 puntos) Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

- a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β .
- b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = -\frac{3}{5} - 2\lambda \\ z = -\frac{1}{5} - \lambda \end{cases}$$

Un punto de r puede ser: $\left(0, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ y

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(2, -2, -1)$$

- b) $\gamma : 2x + y + 2z + \lambda = 0$ y contiene al punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$, luego:

$$2\sqrt{2} + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -(1 + 2\sqrt{2}) \implies$$

$$\gamma : 2x + y + 2z - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

12.2. Modelo 2011 - Opción B

Problema 12.2.1 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$
- b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.
- c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3I &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3I = O &\implies A(A - 4I) = -3I \implies A \left(-\frac{1}{3}(A - 4I) \right) = I \implies \\ A^{-1} &= \frac{1}{3}(4I - A) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (A - 2I)^2 &= (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2IA - 2AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I = \\ A^2 - 4A + 3I + I &= O + I = I \implies (A - 2I)^{-1} = A - 2I \end{aligned}$$

Problema 12.2.2 (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$, $C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto). Demostrar que los puntos A , B , C y D son coplanarios.

- b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.
- c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A , B , C y D

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2), \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3), \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 4, -2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{BC} &= (4, 1, 5) = \sqrt{42} \\ \overrightarrow{CD} &= (-2, -4, 2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{AD} &= (4, 1, 5) = \sqrt{42} \end{aligned}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \right| = |2(11, -9, -7)| = 2\sqrt{251} u^2$$

c)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) \\ A(1, -3, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 1 & y+3 \\ -2 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

$$d(E, \pi) = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}} u$$

Problema 12.2.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2) e^{1/x}}{(-1/x^2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1 - \tan x}} \right) = 1$$

Problema 12.2.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \implies x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a $\pi/6$ y de $\pi/6$ a $\pi/2$. Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$

12.3. Junio 2011 - Opción A

Problema 12.3.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a .
- b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b , y resolverlo cuando sea posible.
- c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

- a) $|A| = 4 - a^2 = 0 \implies a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$

- b) Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 6 \neq 0$$

Luego el $\text{Rango}(A) = 2$ independientemente del valor de b . Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\left| \begin{array}{ccc} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{array} \right| = 6(b-3) = 0 \Rightarrow b = 3$$

Si $b \neq 3 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Problema 12.3.2 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

- b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

- a) LLamamos A al punto intersección de π con r_1 :

$$2x + 3x + 7x = 24 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 2, 2)$$

LLamamos B al punto intersección de π con r_2 :

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow B(12, 0, 0)$$

Llamamos C al punto intersección de π con r_3 :

$$3y = 24 \implies y = 8 \implies B(0, 8, 0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) \quad \overrightarrow{OB} = (12, 0, 0) \quad \overrightarrow{OC} = (0, 8, 0)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} \right| = 32u^3$$

b) Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_{r_4} \times \vec{u}_{r_5} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, -3, -1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_4} = (1, 2, -2) \\ P_{r_4}(-1, 5, -1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 8x+7y+11z-16=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -3, -1) \\ \vec{u}_{r_5} = (2, 3, -1) \\ P_{r_4}(0, -1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : 3x+y+9z-8=0$$

La recta buscada será:

$$t : \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}$$

Problema 12.3.3 (2 puntos) Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

a)

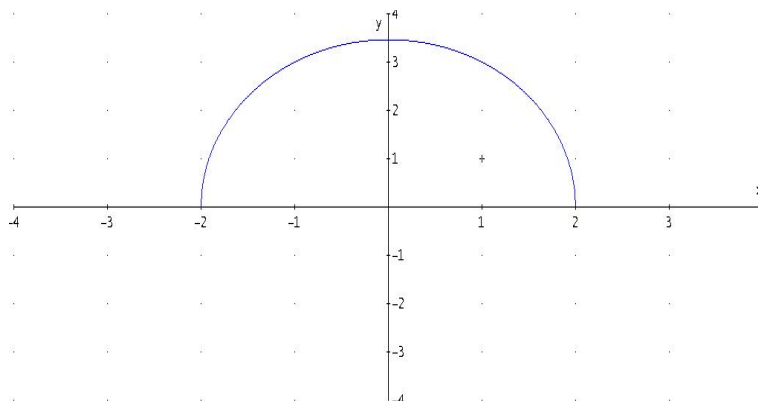
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx = \left[\frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15} \right]_1^3 = \frac{316}{15}$$

- b) El dominio de la función viene dado por la inecuación $12 - 3x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abscisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \Rightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 12.3.4 (2 puntos) Se pide:

- a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

- b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

- a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

- b) Sea cual sea el valor de m , la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + 3x + m) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x + m) = -\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abscisas.

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \geq 0 \quad \forall x \in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

12.4. Junio 2011 - Opción B

Problema 12.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

- (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{ax^4 - 3}{x^4} = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0 \implies a = 3$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \implies f''(1) = 12 > 0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \implies 3x^4 = 3 \implies x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \implies f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0} \right] = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

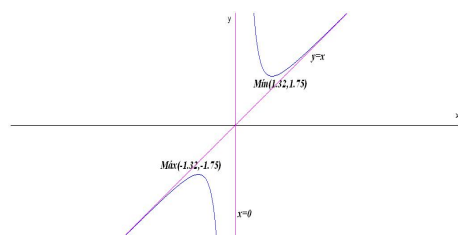
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = 0$$

$$y = x$$

c) La gráfica para $a = 1$:



Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \implies x = -1, 32, \quad x = 1, 32$$

	$(-\infty; -1, 32)$	$(-1, 32; 1, 32)$	$(1, 32; \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 32; -1, 75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, 32; 1, 75)$

Problema 12.4.2 (3 puntos)

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m .

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} y + (m-1)z = m \\ (m-1)y + z = m \\ (m-2)x + = m+2 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array} \right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \implies m = 0, \quad m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

b) Si $m = 0$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $m = 1$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 12.4.3 (3 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

- (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.
- (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Solución:

a)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \implies \text{se cortan}$$

b)

$$t : \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right)$ y el vector director $\vec{u}_t = (0, 2, 1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\vec{u}_t = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2}$, y el punto P_t , dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

Problema 12.4.4 (2 puntos) Se pide:

- (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

Solución:

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x+y+2z-2=0$$

$$\text{b) } -2x + y + z + \lambda = 0 \implies -2 + 2 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3:$$

$$\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AP} = (0, 2, 3):$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-8| = \frac{4}{3} u^3$$

12.5. Septiembre 2011 - Opción A

Problema 12.5.1 (3 puntos).

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

$$\text{b) (1 punto) Calcular la integral: } \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$.
Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \ln |1+3x^2| \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \ln 2$$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0 \implies \text{Dom}(f) = (-\infty, -7] \cup [-2, \infty).$

$$f'(x) = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 + 9x + 14}}$$

La función tiene derivada en $(-\infty, -7) \cup (-2, \infty).$

Problema 12.5.2 (3 puntos). Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0; \quad \pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2};$$

se pide:

- (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
- (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
- (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .

Solución:

$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2} \implies \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) $d(P_r, \pi_1) = d(P_r, \pi_2):$

$$\frac{|2(1+2\lambda) + 3(-1+\lambda) + (-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - 3(-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$|-4+9\lambda| = |6-\lambda| \implies \begin{cases} -4+9\lambda = 6-\lambda \implies \lambda = 1 \implies P'_r(3, 0, 0) \\ -4+9\lambda = -6+\lambda \implies \lambda = -1/4 \implies P'_r(1/2, -5/4, -5/2) \end{cases}$$

b) Corte de π_1 con el eje OX : hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies A(1/2, 0, 0).$

Corte de π_1 con el eje OY : hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 1/3, 0).$

Corte de π_1 con el eje OZ : hacemos $x = 0$ e $y = 0 \implies C(0, 0, 1).$

Los vectores que forman estos puntos con el origen son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA} = (1/2, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/3, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{36} u^2$$

- c) Obtenemos esta recta como intersección de dos planos, uno de ellos será π_2 y el otro será un plano π perpendicular a π_2 y que contiene a r :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -3) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(1, -1, -2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ -3 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x-2y-3=0$$

$$\text{Proyección : } \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

Problema 12.5.3 (2 puntos). Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2(a+2) = 0 \implies a = -2$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Luego $\text{Rango}(A) = 3, \forall a \in \mathbb{R}$

Problema 12.5.4 (2 puntos). Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M .
- (1 punto). Hallar la matriz M^2 .
- (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25} .

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c)

$$M^n = \begin{cases} M & \text{si } n \text{ impar} \\ I & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \implies M^{25} = M$$

12.6. Septiembre 2011 - Opción B

Problema 12.6.1 (3 puntos). Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r .
- (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .

Solución:

a) Lo calculamos siguiendo los tres pasos siguientes:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P :

$$2x + y - z + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi : 2x + y - z = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π con r :

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \implies \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \implies$$

$$2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - (-\lambda) = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{6} \implies P' \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

- El punto que buscamos P'' tiene que cumplir:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

- b) Calculo un plano $\pi \perp r$, que contenga a P , calculado en el apartado anterior $\pi : 2x + y - z = 0$, y el punto de corte P_1 de este plano con la recta s

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \implies 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies P_1 = O(0, 0, 0)$$

La recta t que buscamos pasa por los puntos O y P :

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (0, 1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 12.6.2 (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4k \\ -k^3x + k^2y + kz = 0 \\ x + ky = k^2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k .
- (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.
- (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array} \right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k(2-k) = 0 \implies k = 0, \quad k = 2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD}$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI}$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $k = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right); \quad 2F_3 = F_1 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{array} \right| = 40 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI Sistema compatible indeterminado.}$

b)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ -8x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4/5 + 1/5\lambda \\ y = 8/5 - 1/10\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 12.6.3 (2 puntos). Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Solución: f es continua en $x = 0$ si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Como $f(0) = k \implies k = 0$

Problema 12.6.4 (2 puntos).

- (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

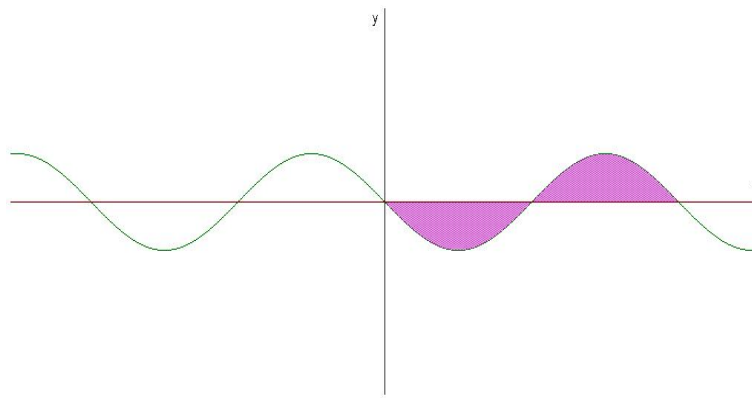
Solución:

a) $f(x) = -\sin x = 0 \implies x = 0$ y $x = \pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos recintos de integración $S_1 \equiv [0, \pi]$ y $S_2 \equiv [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} (-\sin x) dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 \text{ u}^2$$



b)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 \text{ u}^3$$

Capítulo 13

Año 2012

13.1. Modelo 2012 - Opción A

Problema 13.1.1 (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 3)$, se pide:

- a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A , B y C . ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?
- b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por A , B y C .

Solución:

- a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A , B y C será la recta en la que se cortan los planos medidores definidos entre A y B , entre A y C y entre B y C . Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano medidor entre A y B :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} \implies 2x+2y-6z+1=0$$

Plano medidor entre A y C :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \implies x-2y-z+2=0$$

$$r : \begin{cases} 2x+2y-6z+1=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (7, 2, 3) \\ P_r \left(-1, \frac{1}{2}, 0 \right) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + 7\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano π :

$$2(-1 + 7\lambda) + 2\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) + 2(3\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = 0$$

El único punto es el $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

- b) La ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C vendrá determinada por:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(1, -1, 2) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x+2y+3z-11=0$$

Problema 13.1.2 (3 puntos) Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .
b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array} \right) \implies |A| = -9m - 27 = 0 \implies m = -3$$

Si $m \neq -3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array} \right) \implies |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & 5z = & -4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 13.1.3 (2 puntos) Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda(e^{\lambda x^2} + 2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2$$

Para que f sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Luego $\frac{\lambda}{3} = 2 \implies \lambda = 6$ verificaría la primera igualdad, pero no la segunda, dado que $f(0) \neq 2$. Es decir, con $\lambda = 6$ la función será continua en $R - \{0\}$, en $x = 0$ presenta una discontinuidad evitable y sería continua si incluimos la rama $f(0) = 2$.

Problema 13.1.4 (2 puntos) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \implies P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} P'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \implies \frac{1}{3} - \frac{2a}{3} + b = 0 \\ P'(-1) = 0 \implies 3 - 2a + b = 0 \\ P'(0) = 1 \text{ pendiente de } y = x + 3 \implies b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

El punto $(0, P(0))$ también pertenece a la recta $y = x + 3$ luego para $x = 0 \implies y = 3 \implies P(0) = 3 \implies c = 3$ El polinomio buscado es

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

13.2. Modelo 2012 - Opción B

Problema 13.2.1 (3 puntos) Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \quad \text{y} \quad f(4) = -1;$$

Hallar:

- a) (0,5 puntos). $\int_2^5 f(x) dx$
- b) (1 punto). $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$
- c) (1,5 puntos). $\int_2^4 F(x)f(x) dx$.

Solución:

- a) $\int_2^5 f(x) dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$
- b) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 dx =$
 $= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$
- c) $\int_2^4 F(x)f(x) dx = \left[\frac{(F(x))^2}{2} \right]_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$

Problema 13.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema segun los valores del parámetro a .
- b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array} \right) \Rightarrow |\overline{A}| = 2a^2 + 12a - 32 = 0 \Rightarrow a = 2, a = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -8 \Rightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -8 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Si $a = -8$:

$$\begin{cases} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 13.2.3 (3 puntos) Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' : 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

- a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π' .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$$

En su forma continua:

$$r : \frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{6}$$

$$u_r = u_\pi \times u_{\pi'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, 6); \quad P_r(0, 0, -2)$$

b) Sea $P(x, y, z)$ un punto tal que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$:

$$\frac{|x - 2y + 2z + 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|2x + 2y - z - 2|}{\sqrt{9}} \implies |x - 2y + 2z + 4| = |2x + 2y - z - 2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 4 = 2x + 2y - z - 2 \implies x + 4y - 3z - 6 = 0 \\ x - 2y + 2z + 4 = -(2x + 2y - z - 2) \implies 3x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 13.2.4 (2 puntos) Dadas las rectas

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s .

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-6, 4, 4) \\ P_r(-3, 9, 8) \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, -2, -2) \\ P_s(3, 9, 8) \end{cases} ; \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (6, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \vec{u}_r = -2\vec{u}_s \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

- b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}} u$$

$$|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix} \right| = |24(0, -1, 1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\vec{u}_r| = 2\sqrt{17}$$

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k .
- (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.
- (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)

$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \implies k = 0, \quad k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \implies \text{Rango}(A) = 3$
- Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

■ Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right), \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{array} \right| = 20 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Rightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Problema 13.3.2 (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (3, -3, 3)$:

$$\left| \begin{array}{ccc} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{array} \right| = 7(3a-4) = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7 = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \right| \implies |3a-4| = 6 \implies \begin{cases} a = 10/3 \\ a = -2/3 \end{cases}$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2} \implies 4y + 10z - 31 = 0$$

Problema 13.3.3 (2 puntos) Hallar a , b , c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a \\ \begin{cases} f(1) = 0 \implies a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \implies 2a + b = -3 \\ f''(3) = 0 \implies a = -9 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = -9 \\ b = 15 \\ c = -5 \end{cases} \\ f(x) &= x^3 - 9x^2 + 15x - 5 \end{aligned}$$

Problema 13.3.4 (2 puntos) Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx$
- (1 punto). $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx$

Solución:

- (1 punto). $\int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)$

$$I = \int e^{2x} \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \implies du = -\sin x \\ dv = e^{2x} \, dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{\cos x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \sin x \implies du = \cos x \\ dv = e^{2x} \, dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{\cos x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx \right)$$

$$I = \frac{\cos x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} I \implies I + \frac{1}{4} I = \frac{(2 \cos x + \sin x) e^{2x}}{4} \implies$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{(2 \cos x + \sin x) e^{2x}}{5}$$

- $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 (3 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}, \quad g(x) = (\ln x)^x, \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.
- c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $\operatorname{Dom}(f) = (\sqrt{3}, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = 3$$

b)

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln x} \right) \Rightarrow g'(e) = 1$$

c) $h(x)\operatorname{sen}(\pi - x) = 0 \Rightarrow \pi - x = k\pi \Rightarrow x = (1 - k)\pi$, el único punto de corte en este intervalo es en $x = \pi$.

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Rightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi \left(\frac{1}{2} - k \right)$$

Luego $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Problema 13.4.2 (3 puntos) Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.
- b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (3, -5, 2) \\ P_{r_1}(2, 1, 0) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (-1, 1, 0) \\ P_{r_2}(-1, 3, 5) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3, 2, 5)$$

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}]|}{|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}|} = \frac{|-8|}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} u$$

$$|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-2, -2, -2)| = 2\sqrt{3}$$

Problema 13.4.3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a .
b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

a)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = 40(1-a) = 0 \implies a = 1$$

Luego si $a \neq 1 \implies \text{Rango}(B) = 3$. Si $a = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0 \implies \text{Rango}(B) = 2$$

b) Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \implies X = A^{-1}B :$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 13.4.4 (2 puntos) Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$

13.5. Junio 2012 (coincidente)- Opción A

Problema 13.5.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

- (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x = 0 \implies x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada.
 $f''(x) = -2 \cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \implies \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \implies \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \implies \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo}$$

b)

$$f''(x) = -2 \cos 2x = 0 \implies x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm3\pi/4$.
Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4 \sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \implies \text{en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \implies \text{en } x = \pm3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$g(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/2 + \sin \pi/2}{4} + C = \frac{\pi + 2}{8} + C = 0 \implies C = -\frac{\pi + 2}{8}$$

$$g(x) = \frac{2x + \sin 2x}{4} - \frac{\pi + 2}{8}$$

Problema 13.5.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y + (a-1)z = 1 \\ -x + ay + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a .

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & (a-1) & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right); \quad |A| = -2 \left(a + \frac{1}{2} \right) (a + 2) = 0 \implies$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad a = -2$$

■ Si $a = -\frac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \implies |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{array} \right| \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

■ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

Problema 13.5.3 (2 puntos)

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q .

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r .

Solución:

a)

$$(2+2\lambda-2)^2 + (1-\lambda-1)^2 + (3-(-1))^2 = (2+2\lambda-1)^2 + (1-\lambda)^2 + (3-2)^2 \implies$$

$$\lambda = \frac{13}{2} \implies \left(15, -\frac{11}{2}, 3 \right)$$

b)

$$2x - y + \lambda = 0, \quad 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2$$

$$\pi : 2x - y - 2 = 0$$

Problema 13.5.4 (2 puntos) Una de las caras del paralelepípedo H tiene vertices en los puntos $A(4, 2, 8)$, $B(6, 4, 12)$, $C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

- a) (1 punto). Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vertices, hallar el volumen de H .
- b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2, 2, 4); \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (2, -2, 2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE} = (2, 6, 20) \implies V = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 112 \text{ u}^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-4 \\ -2 & 2 & y-2 \\ 2 & 4 & z-8 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv 3x + y - 2z + 2 = 0$$

- Calculamos la ecuación de la recta $r \perp \pi$ que pasa por E :

$$r \equiv \begin{cases} x = 6 + 3\lambda \\ y = 8 + \lambda \\ z = 28 - 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte E'' de r con π :

$$3(6+3\lambda) + (8+\lambda) - 2(28-2\lambda) + 2 = 0 \implies \lambda = 2 \implies E''(12, 10, 24)$$

■

$$\frac{E + E'}{2} = E'' \implies E' = 2E'' - E = (24, 20, 48) - (6, 8, 28) = (18, 12, 20)$$

13.6. Junio 2012 (coincidente)- Opción B

Problema 13.6.1 (3 puntos) Dadas la recta r y la familia de rectas s , mediante

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases},$$

se pide:

- (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.
- (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Solución:

a)

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{a - \mu}{2} \\ z = -\mu \end{cases} \implies \begin{cases} -3 - 2\lambda = \mu \\ \lambda = \frac{a - \mu}{2} \\ 1 = -\mu \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \\ a = -3 \end{cases} \implies a = -3, \text{ y el punto de corte es } P(-1, -1, 1)$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ P_r(-3, 0, 1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1/2, -1) = 1/2(2, -1, -2) \\ P_s(0, -3/2, -1) \end{cases} \implies$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (2, -1, -2) \\ P_r(-3, 0, 1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} -2 & 2 & x+3 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi \equiv x + 2y + 3 = 0$$

Problema 13.6.2 (3 puntos) . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a) \text{ (1,5 puntos)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad b) \text{ (1,5 puntos)} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

Problema 13.6.3 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
- b) (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -1$$

Problema 13.6.4 (2 puntos)

- a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u) du = 3$.
Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2 dx$$

- b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

- a)

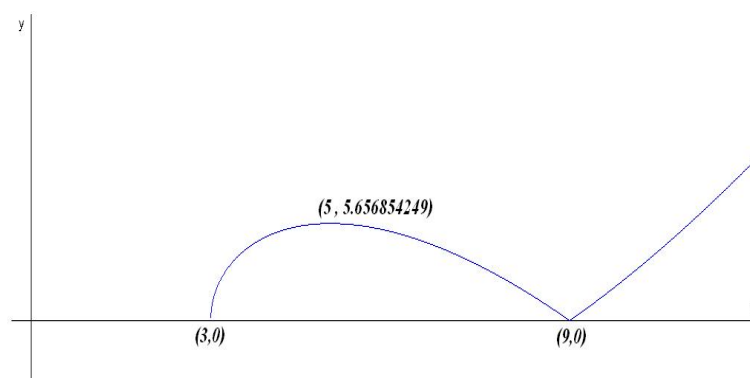
$$\int_1^2 f(x^3)x^2 dx = [u = x^3] = \frac{1}{3} \int_1^8 f(u) du = 1$$

- b) $\text{Dom}(F(x)) = [3, +\infty)$

$$F'(x) = \frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}} = 0 \implies x = 5, x = 9$$

	$(3, 5)$	$(5, 9)$	$(9, \infty)$
$F'(x)$	+	-	+
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5, 4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9, 0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3, 0)$ hay un mínimo global.



13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ?
- b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
- c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \implies A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \neq f'(3^+) = 4 \implies \text{no es derivable en } x = 3$$

- b) $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \implies x = 5$
- c) $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Problema 13.7.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a .
- b) (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 4 & 6 \\ 1 & (a+1) & 1 & 3 \\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array} \right) \quad |A| = -3a^2 - 8a - 5 = 0 \implies a = -1, \quad a = -5/3$$

- Si $k \neq -1$ o $k \neq -5/3 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k = -5/3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5/3 & 4 & 6 \\ 1 & -2/3 & 1 & 3 \\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array} \right) \implies \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -8/3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array} \right); \quad F_3 = F_2 - F_1$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} 3x - & y + & 4z = & 6 \\ & x + & & z = & 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 13.7.3 (2 puntos) Se dan la recta r y el plano π , mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -1, 3) \\ P_r(4, 1, 2) \end{cases}$$

$$1 = d(P, \pi) = \frac{|2(4 + 2\lambda) + (1 - \lambda) - 2(2 + 3\lambda) - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$|3\lambda + 2| = 3 \implies \begin{cases} 3\lambda + 2 = 3 \implies \lambda = 1/3 \implies P_1(14/3, 2/3, 3) \\ -3\lambda - 2 = 3 \implies \lambda = -5/3 \implies P_1(2/3, 8/3, -3) \end{cases}$$

Problema 13.7.4 (2 puntos) Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
- (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Solución:

a)

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 2, -2) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ A(2, 3, 4) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - y + 2z - 11 = 0$$

b)

$$t \equiv \begin{cases} \vec{u}_t = (3, -1, 2) \\ P_t(4, -1, 2) \end{cases} \implies \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 (3 puntos) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

- (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.
- (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.
- (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

Solución:

a)

$$\frac{P' + P}{2} = Q \implies P' = 2Q - P = (4, -1, 5)$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P

$$x + y + z + \lambda = 0 \implies 2 + 1 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies x + y + z - 2 = 0$$

Calculamos el punto de corte P_1 de π con r :

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = 0 \implies P_1(1, 1, 0)$$

Por último:

$$\frac{P'' + P}{2} = P_1 \implies P'' = 2P_1 - P = (0, 1, 1)$$

c) Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a P :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P(2, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte P_2 de π con r :

$$(2 + \lambda) + (1 + \lambda) + (-1 + \lambda) - 3 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{3} \implies P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por último:

$$\frac{P''' + P}{2} = P_2 \implies P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 13.8.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

- (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
- (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
- (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.

b) La integral se calcula por partes:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos x \, dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \\ \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx &= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \Big|_0^\pi = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

c) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \implies m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

Problema 13.8.3 (3 puntos) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos). $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$.

b) (0,75 puntos). $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.

c) (0,75 puntos). $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$

Solución:

$$\text{a) } \det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = 3\det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{b}) = -3\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = 3$$

$$\text{b) } \det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{c}, -\vec{d}) + \det(-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = -3 - 2 = -5$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) &= \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{d}, 2\vec{a}, -3\vec{a}) + \\ &\det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{d}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, -3\vec{a}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{d}) = \\ &-2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4 \end{aligned}$$

Problema 13.8.4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - & 2z = & 2 \\ ax - & y + & z = & -8 \\ 2x + & & az = & 4 \end{cases}$$

se pide:

- (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a .
- (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array} \right); |A| = -a - 4 = 0 \implies a = -4$$

- Si $a \neq -4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right); |A| = 0, \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{array} \right| = 0; |A_4| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{array} \right| = 0$$

Como

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego cuando $a = -4$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x - & 2z = & 2 \\ -5x - & y + & z = & -8 \\ 2x - & & 5z = & 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Capítulo 14

Año 2013

14.1. Modelo 2013 - Opción A

Problema 14.1.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- b) (1 punto). Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
- c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0; \quad f(0) = a$$

Luego $a = 0$.

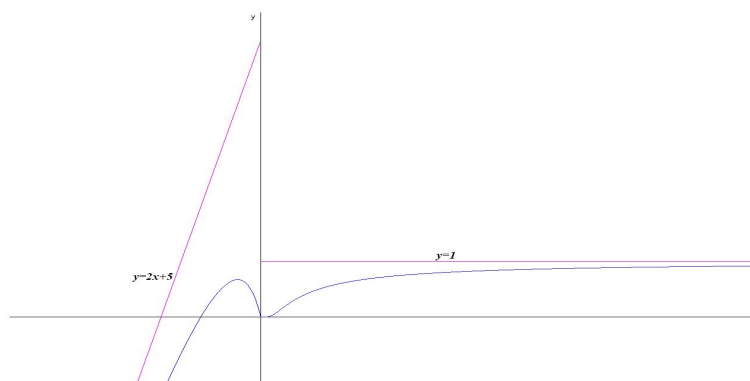
b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 4x - 3}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 3; \quad f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1/h^2}{-1/h^2 e^{1/h}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/h}} = 0$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.



c) Si $x < 0$:

- Verticales: La única posible sería en $x = 1$, pero no está en la rama y, por tanto no es válida.
- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x - 1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x - 1} \right) = 5 \Rightarrow y = 2x + 5$$

Si $x > 0$:

- Verticales: No puede haberlas.
- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Problema 14.1.2 (3 puntos) Dado el sistema

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & (m+3)z = & 3 \\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z = & 8 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .
- (1 punto). Resolverlo para $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 0, \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\text{Rango}(A) = 2.$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Rightarrow \text{el sistema es incompatible.}$

b) Para $m = -2$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ x+ & y+ & 2z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & = & 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 14.1.3 (2 puntos)

- (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3 ; π_4 ; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3; \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, 3, -1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$6x - y + 3z = -2 \implies 6(1 + 2\lambda) - (2 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \implies \\ \lambda = -1 \implies P'(-1, -1, 1)$$

b)

$$\pi_5 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+7 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_5 : 5x - 3y - z = -3$$

$$P : \begin{cases} 5x + 2y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5x - 3y - z = -3 \end{cases} \implies P(1, 3, -1)$$

Problema 14.1.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r .

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-6, 1, 2) \\ P_r(0, -1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -6\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$x - y + 2z = 1 \implies (-6\lambda) - (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) = 1 \implies \\ \lambda = 0 \implies \text{se cortan } P'(0, -1, 0)$$

b)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-6, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_r P} = (1, 2, 1) \\ P(111) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -6 & 1 & x \\ 1 & 2 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 3x - 8y + 13z = 8$$

14.2. Modelo 2013 - Opción B

Problema 14.2.1 (3 puntos)

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{ll} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1; 5; -3)$.

Solución:

a)

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \mu = -1 + 2\lambda \\ \mu = 2 + \lambda \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 7 \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \implies 1 - 2(7) \neq -5 \implies \text{se cruzan}$$

Otra forma:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, -2) \\ P_{r_1}(2, 0, 1) \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (2, 1, -1) \\ P_{r_2}(-1, 2, 0) \end{cases}; \quad \overrightarrow{P_{r_1} P_{r_2}} = (-3, 2, -1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 3y- & z = & 5 \\ 2x+ & 2y+ & 4z = & 3 \\ x+ & 3y & & = & a \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 36 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

Si $a = 9/2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema tiene solución única. Se trata de un sistema compatible determinado. Por tanto, en $a = 9/2$ los cuatro planos se cortan en un punto.

c)

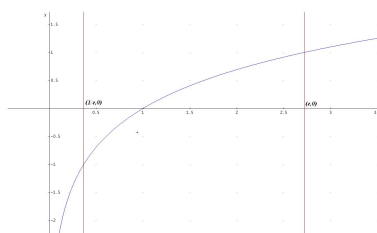
$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1, -2, -8) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -3 - 8\lambda \end{cases}$$

Problema 14.2.2 (3 puntos)

- (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.
- (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.
- (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Solución:

- $f(1/e) = -1$, $f(e) = 1$ y $f(1) = 0$:

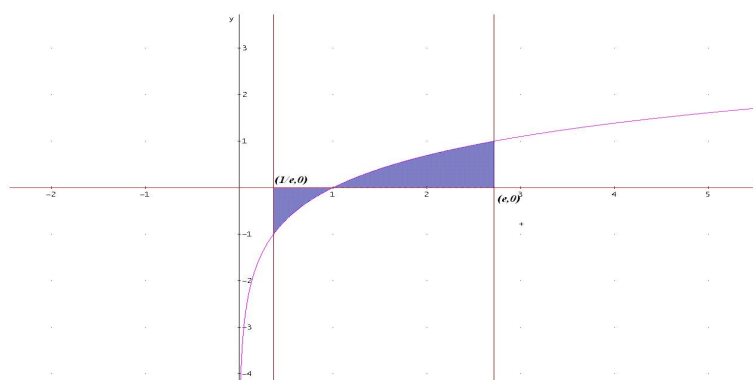


b)

$$F(x) = \int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$$

$$S_1 = F(1) - F(1/e) = \frac{2-e}{e}; \quad S_2 = F(e) - F(1) = 1$$

$$\text{Área} = |S_1| + |S_2| = \left| \frac{2-e}{e} \right| + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = \frac{2(e-1)}{e}$$



c)

$$F(x) = \int (\ln x)^2 \, dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \implies du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] =$$

$$x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1)$$

$$V = \pi \int_{1/e}^e (\ln x)^2 \, dx = \pi(F(e) - F(1/e)) = \frac{\pi(e^2 - 5)}{e}$$

Problema 14.2.3 (2 puntos)

a) (1 punto). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A .

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
 AX = XA &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\begin{cases} x+2z = x+2y \Rightarrow z = y \\ y+2t = 2x+y \Rightarrow t = x \\ 2x+z = z+2t \Rightarrow t = x \\ 2y+t = 2z+t \Rightarrow z = y \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

Problema 14.2.4 (2 puntos) De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B .

Solución:

a)

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A - B = (A + B)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

14.3. Junio 2013 - Opción A

Problema 14.3.1 (3 puntos) Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas

$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s .
- (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
- (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, 1, 3)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) La recta h la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P_s} = (2, -1, -2) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & y \\ -2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : x - 4y + 3z = 5$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P_s} = (2, 0, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : x - y - 2z = -5$$

$$h : \begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

c)

$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

La recta t la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x+y-2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : z = 3$$

$$t : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 14.3.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores de a .
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 4$.
- (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies |A| = a^2 - a - 2 = 0 \implies a = -1, a = 2$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$
de incógnitas $\implies$ Sistema compatible determinado.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies |A| = 0, \left| \begin{array}{cc} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -6 \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies |A| = 0, \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2.$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$$

Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ \text{ incógnitas} \implies$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 4$:

$$\begin{cases} 4x + 7y + 5z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

c) Para $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 14.3.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

- (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) ■ Verticales: $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+} \right] = +\infty$$

■ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = +\infty$$

■ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9} \right) = 6 \implies y = x + 6$$

b) $f'(x) = \frac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}$ en el punto de abscisa $x = 2$ el valor de la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 28$ y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 8)$, la recta buscada en su ecuación punto pendiente será:

$$y - 8 = 28(x - 2)$$

Problema 14.3.4 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x-3}{x^2+9} dx \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx$$

Solución:

a)

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \int \frac{x}{x^2+9} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+9| - \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

b)

$$\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x^2} - \ln |x| \right]_1^2 = \frac{21}{8} - \ln 2$$

14.4. Junio 2013 - Opción B

Problema 14.4.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- c) (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

Solución:

a)

$$f'(x) = -2 \sin 2x = 0 \implies x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada.
 $f''(x) = -4 \cos 2x$:

$$f''(0) = -4 < 0 \implies \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo absoluto}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \implies \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \implies \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

b)

$$f''(x) = -4 \cos 2x = 0 \implies x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 8 \sin 2x$:

$$f'''(\pi/4) = 8 \neq 0 \implies \text{en } x = \pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(-\pi/4) = 8 \neq 0 \implies \text{en } x = -\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$\int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = x + \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Problema 14.4.2 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.
- (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.
- (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ .

Solución:

- $|A| = \lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1$. Si $\lambda \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$ por tanto la solución del sistema $XA = B \implies X = BA^{-1}$ tiene solución única.

- Si $\lambda = 4$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad X = BA^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2/5 & 3/5 & 11/5 \\ 3/5 & 7/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

- $|A^2B| = |A||A||B| = -(\lambda + 1)^2$

Problema 14.4.3 (2 puntos)

- (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$ con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.
- (1 punto). Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$$

Solución:

a)

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(4, 6, 2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 26 \implies (4+2\lambda-1)^2 + (6+\lambda-2)^2 + (2+\lambda+1)^2 = 26 \implies$$

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \quad \lambda = -4 \implies P' \left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3} \right), \quad P''(-4, 2, -2)$$

b)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(1, -2, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r Q} = (-3, 3, -3)$$

$$|\overrightarrow{P_r Q}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |9(1, 0, -1)| = 9\sqrt{2}$$

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r Q}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2} \, u$$

Problema 14.4.4 (2 puntos) Dados el punto $P(1, 0, -1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π .

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π .

Solución:

a)

$$r \equiv \begin{cases} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ P_r(0, 1, -3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ \vec{u}_\pi = (2, -1, 1) \\ P(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : x+y-z = 2$$

b)

$$\sin \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_\pi|} = \frac{3}{\sqrt{84}} \implies \alpha = 19^\circ 6' 24''$$

14.5. Septiembre 2013 - Opción A

Problema 14.5.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

- (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
- (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

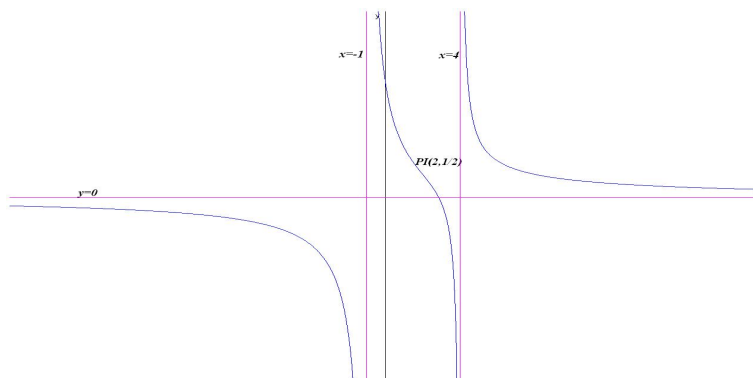
b) $f'(x) = -\frac{5(7x^2 - 40x + 88)}{2(x+1)^2(x-4)^2} < 0 \forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$$f''(x) = \frac{5(7x^3 - 60x^2 + 264x - 344)}{(x+1)^3(x-4)^3} = 0 \implies x = 2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

c) La gráfica es:



Problema 14.5.2 (3 puntos) Dadas la matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Calcular el determinante de A . Determinar el rango de A según los valores de a .
- (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.
- (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & a \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(a-1) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = -(a-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a^2) = -(a+1)(a-1)^3$$

$$-(a+1)(a-1)^3 = 0 \implies a = -1, \quad a = 1$$

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 4$.

- b) Si $a = 1$ el $\text{Rango}(A) = 1$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 1 = 3$ parámetros:

$$x + y + z + w = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu - \sigma \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ w = \sigma \end{cases}$$

- c) Si $a = -1$ el $\text{Rango}(A) = 3$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 3 = 1$ parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+ & y- & z- & w = & 0 \\ -x+ & y+ & z- & w = & 0 \\ -x- & y- & z+ & w = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \\ w = \lambda \end{cases}$$

Problema 14.5.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; -2)$, $C(-2; 0; -4)$, $D(2; -6; 2)$, se pide:
se pide:

- a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC .

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, -1, -2)$ y $\overrightarrow{CD} = (4, -6, 6) = -2(-2, 3, -3)$.
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, luego se trata de un trapecio.

b) La distancia será la de A sobre el vector $\overrightarrow{CD}$. Construimos el vector $\overrightarrow{CA} = (4, -2, 5)$:

$$S = |\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \right| = |(-18, 4, 16)| = 2\sqrt{149} \, u^2$$

$$|\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{22}$$

$$S = |\overrightarrow{CD}| \cdot h \implies h = \frac{2\sqrt{149}}{2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{149}{22}}$$

c) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 2, -5)$:

$$S_T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-9, 2, 8)| = \frac{\sqrt{149}}{2} \, u^2$$

Problema 14.5.4 (2 puntos) Dados el punto $P(1; 2; -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P' .

b) (1 punto). Hallar la ecuación de S .

Solución:

a) Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{ur} = (1, 2, -2) \\ P_r = P(1, 2, -1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

El punto P' es el punto de corte de r con π :

$$1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + 2 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P'(0, 0, 1)$$

b) La esfera S tiene de centro el punto medio entre P y P' , será $C(1/2, 1, 0)$ y su radio será la semidistancia de P a π :

$$r = \frac{d(P, \pi)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1 + 4 + 2 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 1 = 0$$

14.6. Septiembre 2013 - Opción B

Problema 14.6.1 (3 puntos) Sean r_A la recta con vector dirección $(1; \lambda; 2)$ que pasa por el punto $A(1; 2; 1)$, r_B la recta con vector dirección $(1; 1; 1)$ que pasa por $B(1; -2; 3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1; 1; -2)$ que pasa por $C(4; 1; -3)$. Se pide:

- (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.
- (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .
- (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .

Solución:

$$r_A : \begin{cases} \vec{u}_{r_A} = (1, \lambda, 2) \\ P_{r_A} = A(1, 2, 1) \end{cases}, \quad r_B : \begin{cases} \vec{u}_{r_B} = (1, 1, 1) \\ P_{r_B} = B(1, -2, 3) \end{cases}, \quad r_C : \begin{cases} \vec{u}_{r_C} = (1, 1, -2) \\ P_{r_C} = C(4, 1, -3) \end{cases}$$

- Utilizamos el vector auxiliar $\vec{AB} = (0, -4, 2)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = -1$$

Para que las rectas r_A y r_B se corte es necesario que $\text{Rango}(A) = 2 \implies \lambda = -1$. En este caso puede ser también que las rectas sean paralelas, para eliminar esta posibilidad se estudia:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_{r_A} \\ \vec{u}_{r_B} \end{pmatrix} = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies r_A \text{ y } r_B \text{ se cortan}$$

- Plano definido por r_B y r_C :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_{r_B} = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_{r_C} = (1, 1, -2) \\ B(1, -2, 3) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x-y-3 = 0$$

$$\vec{\pi} = (1, -1, 0) \perp \vec{u}_{r_A} \implies \vec{\pi} \cdot \vec{u}_{r_A} = 0$$

$$(1, -1, 0) \cdot (1, \lambda, 2) = 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$$

-

$$\cos \alpha = \frac{u_{r_B} \cdot u_{r_C}}{|u_{r_B}| |u_{r_C}|} = \frac{1+1-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Problema 14.6.2 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1-\lambda \\ & x+ & y+ & (\lambda-1)z = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & & y+ & & z = & \lambda-1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ .
- b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.
- c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & -2\lambda \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el $\text{Rango}(A) = 1$ y el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$ y el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso: $F_1 = -F_3 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x+ & y+ & z = & 0 \\ & x+ & y & = & -2 \\ & & y+ & z = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

c) Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x- & y- & z = & 2 \\ & x+ & y- & 2z = & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = -2 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Problema 14.6.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\int_0^1 xf(x) dx$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0, \quad m = f'(0) = 1; \quad f(0) = 0 \implies y = x$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x) dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x - \arctan x \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4} \end{aligned}$$

Problema 14.6.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

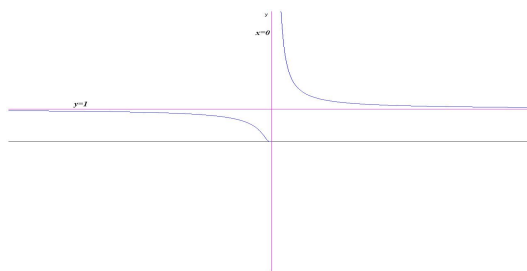
b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$; luego en 0 no existe el límite.

b) La gráfica sería:



Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego la función es siempre decreciente.

Capítulo 15

Año 2014

15.1. Modelo 2014 - Opción A

Problema 15.1.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.
- c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} \forall k, \in R$$

b)

$$k = 6 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX - A = B \implies X = A^{-1}(B + A)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 15.1.2 (3 puntos) Dados el punto $P(1; 1; 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

- (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.
- (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .
- (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3 .

Solución:

a)

$$\begin{cases} 3x + ay + z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies |A| = a^2 + 3a - 10 = 0 \implies a = 2, \quad a = -5$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -5 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible determinado. Solución trivial ($x = y = z = 0$).

Si $a = 2$ o $a = -5$ el sistema es compatible indeterminado (el sistema que forman los tres planos es homogéneo)

Cuando $a = 2$ o $a = -5$ se cortan los tres planos en una recta, que calculo a continuación: Cuando $a = 2$: $F_1 = F_2 + F_3$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Cuando $a = -5$:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)

$$r : \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -4, -1) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (3, -4 - 1) \\ P(1, 1, 1) \end{cases} \implies$$

$$3x - 4y - z + \lambda = 0 \implies 3 - 4 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 2$$

$$3x - 4y - z + 2 = 0$$

c) $\vec{u}_{\pi_3} = (1, 1, -1)$ Calculamos $t \perp \pi_3$ que pasa por P :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_{\pi_3} = (1, 1, -1) \\ P_t(1, 1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Obtenemos P' como punto de corte de t con π_3 :

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies P' \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Problema 15.1.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x} = [1^\infty] = \lambda$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\cos x}{1 - \sin x}}{1} = -1 = \ln \lambda \implies \lambda = e^{-1}$$

Problema 15.1.4 (2 puntos)

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x) dx$.

Hallar

$$\int_5^6 (x - 5)g'(x) dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u) du = \frac{1}{2}$.

Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2} dx.$$

Solución:

a)

$$\int_5^6 (x-5)g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x-5 \implies du = dx \\ dv = g'(x)dx \implies v = g(x) \end{array} \right] = \\ (x-5)g(x)]_5^6 - \int_5^6 g(x) dx = g(6) - 0 - g(6) = 0$$

b)

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{x/2} \implies 2du = e^{x/2}dx \\ x = 0 \implies u = 1 \\ x = 2 \implies u = e \end{array} \right] = 2 \int_1^e f(u) du = 1$$

15.2. Modelo 2014 - Opción B

Problema 15.2.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.
- b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
- c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+6}{x-1} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+}$ la función tiene en $x = 0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

- b) Cuando $x < 0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y = mx + n \implies y = 2x + 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 6}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 6}{x - 1} - 2x \right) = 2$$

Cuando $x \geq 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y = 1$

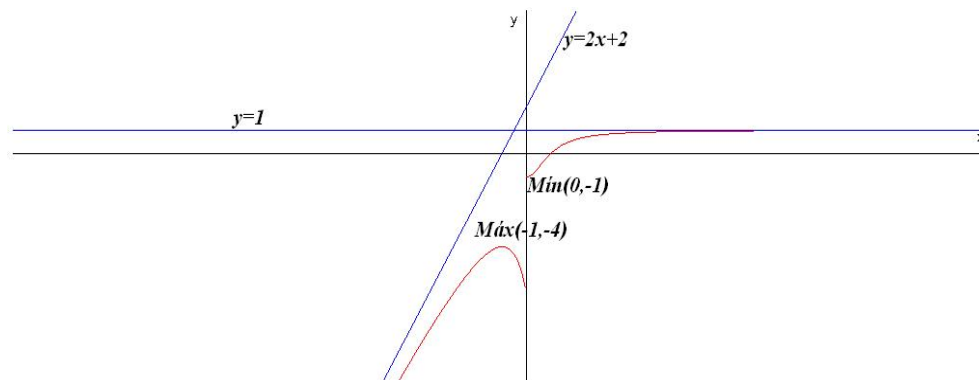
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

c)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando $x < 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1, x = 3$ No vale. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1, -4)$

$x \geq 0$: $4x = 0 \implies x = 0$. En $x = 0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0, -1)$



Problema 15.2.2 (3 puntos)

- a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

- b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5, 7, -1)$$

a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

No se puede construir el triángulo.

- b) Se va a calcular como intersección de dos planos:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(1, -1, 1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+2 \\ -1 & 2 & y+6 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-z+3=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-3 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x+y-4=0$$

$$t : \begin{cases} x-z+3=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

Problema 15.2.3 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (a+2)x + (a+1)y = -6 \\ x + 5y = a \\ x + y = -5 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a .
b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

- a) $|\bar{A}| = -21a - 21 = 0 \implies a = -1$. Si $a = -1 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \implies$ el sistema sería incompatible.

Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(\bar{A}) = 2 = \text{Rango}(A) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ el sistema sería compatible determinado.

- b)

$$\begin{cases} x = -6 \\ x + y = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Problema 15.2.4 (2 puntos) Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

Solución:

- a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

- b)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}$$

15.3. Junio 2014 - Opción A

Problema 15.3.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α , β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema

$$AX = B.$$

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 9/2 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

b) $\beta = \gamma = 1$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |A| = -\alpha(\alpha-1) = 0 \implies \alpha = 0, \quad \alpha = 1$$

Se trata de un sistema homogéneo:

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas por lo que es un sistema compatible determinado y su única solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.

Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1 \implies |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ$ de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 15.3.2 (3 puntos) Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

- (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π .
- (1 punto). Hallar la distancia de P a r .
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX , OY y OZ .

Solución:

a) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 5, -6) \\ P_t = P(1, 0, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P'' de t con π :

$$(1 + \lambda) + 5(5\lambda) - 6(1 - 6\lambda) = 1 \implies \lambda = \frac{3}{31}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3/31 = 34/31 \\ y = 15/31 \\ z = 1 - 18/31 = 13/31 \end{cases} \implies P'' \left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31} \right)$$

- El punto P'' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P' :

$$\frac{P' + P}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = \left(\frac{68}{31}, \frac{30}{31}, \frac{26}{31} \right) - (1, 0, 1) = \left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31} \right)$$

b)

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 0, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P} = (1, 0, 1)$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(0, -1, 0)| = 1$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{1}{1} = 1$$

c) Calculamos los puntos de corte de $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ con los ejes coordenados:

Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0$: $A(1, 0, 0)$

Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0$: $B(0, 1/5, 0)$

Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0$: $C(0, 0, -1/6)$

Luego:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/5, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1/6)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{180} u^3$$

Problema 15.3.3 (2 puntos)

a) (1 punto). Sea $f : R \rightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .

Solución:

a) Por ser $x = -2$ la abscisa del punto de tangencia con la recta $y = 16x + 16 \implies f(-2) = -32 + 16 = -16$.

La pendiente de esta recta es $m = f'(-2) = 16$ y, por último, al ser punto de inflexión $f''(-2) = 0$.

b) $g(x) = x^4 + 4x^3 = 0 \implies x = 0, \quad x = -4$

$$\int_{-4}^0 (x^4 + 4x^3) dx = \left[\frac{x^5}{5} + x^4 \right]_{-4}^0 = -\frac{4^4}{5}$$

$$S = \left| -\frac{4^4}{5} \right| = \frac{256}{5} u^2$$

Problema 15.3.4 (2 puntos) Calcular justificadamente:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 - e^x + 3 \cos(3x)}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - 9 \sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$

15.4. Junio 2014 - Opción B

Problema 15.4.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 - x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(donde $\ln$ denota logaritmo neperiano) se pide:

- (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (1 punto). Calcular el valor de a , para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (a + \ln(1 - x)) &= \infty \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (a + \ln(1-x)) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = 0 \implies a = 0$$

c)

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}(2-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

Luego la función no es derivable en $x = 0$. Concluimos con que f es continua y derivable en $R - \{0\}$ y sería continua en $x = 0$ pero no derivable para $a = 0$.

Problema 15.4.2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r , y es paralela a π .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$2 \cdot 1 - (2 + 2\lambda) = 2 \implies \lambda = -1$$

π y r se cortan en el punto $(1, 0, -1)$

b) $\pi' \perp \pi$, $r \in \pi'$:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (2, -1, 0) \\ \vec{u}_r = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y-4z-5=0$$

c) Seguiremos el siguiente procedimiento:

■ Calculamos el plano $\pi'' \parallel \pi / A \in \pi''$:

$$\pi'' : 2x - y + \lambda = 0 \implies -4 - 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 5 \implies \pi'' : 2x - y + 5 = 0$$

- Calculamos P punto de corte de r con π'' :

$$2 - (2 + 2\lambda) + 5 = 0 \implies \lambda = \frac{5}{2}$$

$$P\left(1, 7, \frac{5}{2}\right)$$

- La recta buscada s pasa por los puntos A y P :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{AP} = (3, 6, 5/2) \\ P_s(-2, 1, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = \frac{5}{2}\lambda \end{cases}$$

Problema 15.4.3 (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

- (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.
- (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A , en el caso $a = 2$.

Solución:

- $|A| = -2a^2 + 5 = 0 \implies a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.
Si $a \neq \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.
Si $a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1} .
- Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Problema 15.4.4 (2 puntos) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

- (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

- b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Solución:

Sean x el precio de un cuaderno, y el precio de un rotulador y z el de un bolígrafo.

a)

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + y + 6z = 14 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -6 + 9z \\ y = 26 - 24z \end{cases}$$

- b) $8x + 3y = 8(-6 + 9z) + 3(26 - 24z) = 30$ euros.

15.5. Septiembre 2014 - Opción A

Problema 15.5.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.
c) (1 punto). Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} = \frac{x+4 + x(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)}$$

- a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, -4\}$ y asíntotas:

■ Verticales:

$$x = -1 : \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -4 : \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \left[\frac{12}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

■ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)} = 1$$

■ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \implies x = \pm 2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

Luego la función tiene un máximo en el punto $(-2, -2)$ y un mínimo en el punto $(2, 2/3)$.

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + 1 - \frac{4}{x+4} \right) dx = \\ &= x + \ln|x+1| - 4 \ln|x+4| \Big|_0^1 = 1 + 9 \ln 2 - 4 \ln 5 = 1 - \ln \left(\frac{625}{512} \right) \simeq 0,8 \end{aligned}$$

Problema 15.5.2 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Solución:

- $|A| = -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \implies a = 0, a = 1 \text{ y } a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 1$ o $a = 2 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/4 \\ -5/24 & -1/6 & -1/8 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$ y $AX = O$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 15.5.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Solución:

- a) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(0, 4, 16)| = 2\sqrt{17} \ u^2$$

- b) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 6)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{50}{3} \ u^3$$

Problema 15.5.4 (2 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

- a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
- b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3 .

Solución:

- a)

$$r : \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

- b) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 3, 2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (0, 1, 0)$:

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_3}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi_3}}| |\overrightarrow{u_r}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \implies \sin \alpha = \cos \beta = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

15.6. Septiembre 2014 - Opción B

Problema 15.6.1 (3 puntos) Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .
- (1 punto). Calcular la distancia entre r y π .
- (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .

Solución:

- $2(1 - 2t) - (2 - 2t) + 2(1 + t) + 3 = 0 \Rightarrow 5 = 0$! Luego la recta r es paralela al plano π . Está claro que $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = -2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi$

- $P_r(1, 2, 1)$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{2 - 2 + 2 + 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3} u$$

- Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $s \perp \pi$ que pase por P :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (2, -1, 2) \\ P_s = P(3, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

- Encontramos el punto P'' de corte entre s y π :

$$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P''(1, 3, -1)$$

- P'' es el punto medio entre P y el punto buscado P' :

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Rightarrow P' = 2P'' - P = (2, 6, -2) - (3, 2, 1) = (-1, 4, -3)$$

Problema 15.6.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
- b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .
- c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx$$

,

donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

Solución:

- a) La función es continua si: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10 \sin x + 2x}{4x} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10 \cos x + 2}{4} = 3$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$$

$$\blacksquare f(0) = a \implies a = 3$$

- b) De ser derivable en $x = 0$ sólo sería para $a = 3$, para cualquier otro valor de a la función no sería continua y, por tanto, tampoco sería derivable. Para que sea derivable tiene que cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$:

$$\blacksquare f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{5 \sin(0+h)}{2(0+h)} + \frac{1}{2} - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \sin h - 5h}{2h^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \cos h - 5}{4h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \sin h}{4} = 0$$

$$\blacksquare f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)e^{0+h} + 3 - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h}{h} = 1$$

- $\blacksquare$ Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies$ la función no es derivable en $x = 0$.

c)

$$\int (xe^x + 3) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx + 3x = 3x + e^x(x-1) + C$$

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx = 3x + e^x(x-1) \Big|_1^{\ln 5} = 8(\ln 5 - 1) = 4,88$$

Problema 15.6.3 (2 puntos) Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- b) (1 punto). Calcular B en el caso $a = 1$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) $A \cdot B = C \implies B = A^{-1}C$, luego la ecuación tiene solución siempre que exista A^{-1} :

$$|A| = 7a - 6 = 0 \implies a = \frac{6}{7}$$

$$\text{Si } a = 7/6 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}.$$

$$\text{Si } a \neq 7/6 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

- b) $B = A^{-1}C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 15.6.4 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -7 & a+10 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & -7 & a+5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & a+10 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & -7 & a+5 \end{vmatrix} = 12 - 2a = 0 \implies a = 6$$

Si $a \neq 6 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 4$.

Si $a = 6 \implies |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) < 4$. Y como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$$

Capítulo 16

Año 2015

16.1. Modelo 2015 - Opción A

Problema 16.1.1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m .
- b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20} .
- c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.
- d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall m \in R \implies \text{Rango}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -2m + 4 = 0 \implies m = 2 \implies \text{Si } m \neq 2 \text{ Rango}(A) = 2$$

$$\text{Y si } m = 2 \text{ tenemos } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \quad \forall m \in R$.

$$\text{b) } |A^{20}| = |A|^{20} = 0^{20} = 0$$

- c) Se trata de un sistema homogéneo y el $\text{Rango}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -3/4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- d) Para $m = 0$ se observa que $F_1 = 2F_2$ y como $\text{Rango}(A) = 2$ se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = -2 \\ -x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 16.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

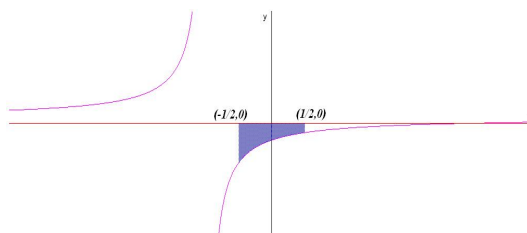
- (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.
- (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Solución:

- $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies \text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$
- $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0 \implies$ La función es creciente en todo el dominio de la función $R - \{\pm 1\}$
-

$$S_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x-3}{x+1} dx = [x - 4\ln(x+1)]_{-1/2}^{1/2} = 1 - 4\ln 3$$

$$S = |S_1| = 4\ln 3 - 1 \text{ u}^2$$



Problema 16.1.3 (2 puntos) Dadas las rectas: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y = z \end{cases}$, se pide:

- (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.
- (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s , y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

- $(1 + 2\lambda) + \lambda = 1 \implies \lambda = 0$ luego las dos rectas se cortan en el punto $(1, 0, 0)$.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 1) \\ P_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|} = \frac{-2 + 1 + 1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

-

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, -1, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(0, -1, 1)$$

Problema 16.1.4 (2 puntos) Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

- (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.
- (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π .
- (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1 .

Solución:

a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -2, -2), \overrightarrow{P_1P_3} = (2, 2, 0):$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ -2 & 2 & y+1 \\ -2 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : 2x - 2y + 3z - 10 = 0$$

b)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -2, 3) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

c) Calculo una recta r que pase por P_1 y perpendicular a π , la del apartado anterior. Ahora hay que encontrar los dos puntos de esta recta que estan a una distancia $\sqrt{17}$ de P_1 y estos serán los centros de las esferas:

Un punto C de r será $C(1 + 2\lambda, -1 - 2\lambda, 2 + 3\lambda)$

$$|\overrightarrow{CP_1}| = |(2\lambda, -2\lambda, 3\lambda)| = |\lambda|\sqrt{17} = \sqrt{17} \implies \lambda = \pm 1$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \implies C_1(3, -3, 5) \implies (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 17 \\ \lambda = -1 \implies C_2(-1, 1, -1) \implies (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 17 \end{cases}$$

16.2. Modelo 2015 - Opción B

Problema 16.2.1 (3 puntos) Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y las rectas:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s .
- (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r .
- (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{cases} , \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0, 0, 1) \\ P_s(2, -3, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1, -6, 0)$$

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-2, 1, -1)$$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-11|}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} u$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P : π :
 $-2x + y - z + \lambda = 0 \implies -2 + 2 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1$ luego
 el plano buscado es π : $-2x + y - z - 1 = 0$
- Calculamos el punto de corte P'' de r y π :

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \implies -2(1-2t) + (3+t) - (-t) - 1 = 0 \implies t = 0 \implies P''(1, 3, 0)$$

■

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2P'' - P = 2(1, 3, 0) - (1, 2, -1) = (1, 4, 1) \implies P'(1, 4, 1)$$

c) El plano XY es el plano π' : $z = 0$ y el plano YZ es el plano π'' : $x = 0$.
 Sea P''' un punto de la recta r que cumple $d(P''', \pi') = d(P''', \pi'')$
 donde $P'''(1 - 2t, 3 + t, -t)$:

$$\frac{|-t|}{1} = \frac{|1 - 2t|}{1} \implies \begin{cases} -t = 1 - 2t \implies t = 1 \implies H(-1, 4, -1) \\ -t = -1 + 2t \implies t = 1/3 \implies Q(1/3, 10/3, -1/3) \end{cases}$$

Problema 16.2.2 (3 puntos) Hallar

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\int (3x + 5) \cos x \, dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1} = 1$$

$$\text{b) } \int (3x+5) \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x+5 \implies du = 3dx \\ dv = \cos x \implies v = \sin x \end{array} \right] =$$

$$(3x+5) \sin x - 3 \int \sin x \, dx = (3x+5) \sin x + 3 \cos x + C$$

c) $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{x^2} = 0 \implies x = 1$. Si $x > 1 \implies f'(x) < 0 \implies f$ es decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Si $x < 1 \implies f'(x) > 0 \implies f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. En $x = 1$ hay un máximo local.

Problema 16.2.3 (2 puntos)

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y , matrices 2×2 , tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (0,5 puntos). Hallar Z , matriz invertible 2×2 , tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\text{b) } Z^2 \cdot 3I \cdot Z^{-1} = 3Z \cdot Z \cdot Z^{-1} = 3Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies Z = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 16.2.4 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m .
- b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ m & m & 0 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{cc} m & 1 \\ 1 & m \end{array} \right| = m^2 - 1 = 0 \implies m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \implies \left| \begin{array}{cc} m & 1 \\ 1 & m \end{array} \right| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$
y, por ser un sistema homogéneo, sería un sistema compatible determinado.

Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right); \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \implies \text{como antes sería}$$

un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ Las tres filas son iguales y el sistema sería compa-}$$

tible indeterminado. ($x + y = 0$)

b)

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

16.3. Junio 2015 - Opción A

Problema 16.3.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde $\ln$ denota logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
- b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
- c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x) dx$.

Solución:

- a) $x > -1$, y $x \neq \pm 2 \implies \text{Dom}(f) = (-1, 2) \cup (2, \infty)$

Asíntotas:

- Verticales:

En $x = -2$: no hay asíntota porque no está en el dominio de la función.

En $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

En $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \text{No existe}$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

- Horizontales: $y = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} + \frac{1 - \ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$.

$f(0) = 0$ y $f'(0) = \frac{3}{4} \implies y = \frac{3}{4}x$ es la recta tangente buscada.

c)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right) dx &= \int \frac{x}{x^2 - 4} dx + \int \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + \frac{(\ln(x + 1))^2}{2} + C \end{aligned}$$

Problema 16.3.2 (3 puntos)

- a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m , el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m - 1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

- b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0 \\ 1 & -2 & m & 1 \\ 5 & m & 1 & 1 \end{array} \right) \quad |A| = -3m^2 + 24m - 21 = 0 \implies m = 1, \quad m = 7$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 7 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$
de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.

Si $m = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -11 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{array} \right| = -24 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -11 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_1 + F_2 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 1$:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{11} - \frac{3}{11}\lambda \\ y = -\frac{4}{11} + \frac{4}{11}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 16.3.3 (2 puntos)

a) (1 punto). Dados vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

Solución:

a)

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \right| = |-2\lambda - 6| = 6 \implies \lambda = 0, \lambda = -6$$

b) $r \in \pi : z = 0, r \perp \vec{u} = (2, -1, 4)$ y $P(1, 1, 0) \in r$:

$$r \in \pi : z = 0 \implies r \perp \vec{u}_\pi = (0, 0, 1) \implies \vec{u}_r = \vec{u}_\pi \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 0) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 16.3.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .

Solución: La esfera tiene de centro el punto $C(1, 1, 2)$ y radio 3. Construimos una recta r perpendicular a π que pase por C :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, -2, 2) \\ P_r = C(1, 1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Encontramos los puntos de corte de esta recta r con la esfera:

$$(1 + \lambda - 1)^2 + (1 - 2\lambda - 1)^2 + (2 + 2\lambda - 2)^2 = 9 \implies \lambda = \pm 1 \implies P_1(2, -1, 4), P_2(0, 3, 0)$$

Calculamos:

$$\pi_1 : \begin{cases} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_1(2, -1, 4) \end{cases} \implies \pi_1 : x - 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_2(0, 3, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : x - 2y + 2z + 6 = 0$$

16.4. Junio 2015 - Opción B

Problema 16.4.1 (3 puntos) Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coor-

denadas O , y la recta $r : \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r , de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.
- b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r .
- c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r , de modo que los puntos O , P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Solución:

- a) Un punto de la recta r es $Q(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda)$ y el punto medio de $\overline{OP}$ será $Q' = \frac{O + P}{2} = (-2, 3, 3)$.

Construimos el vector $\overrightarrow{Q'Q} = (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda)$ y el vector $\overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6)$. Imponemos $\overrightarrow{Q'Q} \perp \overrightarrow{OP} \implies \overrightarrow{Q'Q} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$
 $8 - 16\lambda + 30 + 18\lambda - 18 - 12\lambda = 0 \implies \lambda = 2 \implies Q(4, 14, -4)$

- b)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (4, 3, -2) \\ P_r(-4, 8, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP} = (0, -2, 6)$$

$$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_rP}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = |(14, -24, -8)| = 2\sqrt{209}, \text{ y } |\vec{u}_r| = \sqrt{29}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\vec{u}_r|} = 2\sqrt{\frac{209}{29}} \simeq 5,37 \text{ u}$$

- c) Para que los puntos O , P y R estén alineados las rectas

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6) = 2(-2, 3, 3) \\ P_s = O(0, 0, 0) \end{cases}$$

y la recta r tienen que cortarse en el punto R .

Para ver la posición relativa entre ambas construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (-4, 8, 0)$ y hacemos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -124 \neq 0$$

Luego las rectas r y s se cruzan y, por tanto, los puntos en cuestión no están alineados.

Problema 16.4.2 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f .
- b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x) dx$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + 1) = 1, \text{ y } f(0) = 1 \end{aligned}$$

La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en R .

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h - h}{h^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{2} = 0 \\ f'(0^-) &= 1 \end{aligned}$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies$ la función no es derivable en $x = 0 \implies$ la función es derivable en $R - \{0\}$

$$\text{c) } \int_1^3 f(x) dx = e^x(x-1) - x \Big|_1^3 = 2e^3 + 2 = 42,17$$

Problema 16.4.3 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}
- b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Solución:

$$\text{a) } A^1 = A, A^2 = A \cdot A = I \implies A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ I & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

$$A^{15} = A \text{ y } A^{20} = I$$

$$\text{b) } 6X = B - 3AX \implies 6X + 3AX = B \implies (6I + 3A)X = B \implies X = (6I + 3A)^{-1}B$$

$$6I + 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (6I + 3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 16.4.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

- a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t .
- b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

Solución:

$$\text{a) } |A|t^2 - 9t + 14 = 0 \implies t = 7 \text{ y } t = 2. \text{ Si } t \neq 7 \text{ y } t \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3.$$

Si $t = 7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

b)

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - tI| = -2(-7 + t) = 0 \implies t = 7$$

16.5. Septiembre 2015 - Opción A

Problema 16.5.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m .

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad |A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \implies m = 1, m = 2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_1 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 0$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) para $m = 2$:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 16.5.2 (3 puntos) La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

- a) (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.
- b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, \lambda, -2) \\ P_r = P(2, -1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 4, 2) \\ P_s = Q(1, 0, -1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_s P_r} = (1, -1, 1)$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{18}{2\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \implies$$

$$\lambda = 3 \text{ y } \lambda = -5 \text{ (No válida)}$$

$$|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = 18$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = |2(\lambda + 4, -3, 2 - \lambda)| = 2\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}$$

b)

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \overrightarrow{QP} = (1, -1, 1) \\ P_h = Q(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QP} \perp \vec{u}_h \implies \overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_h = 0$$

$$(1, \lambda, -2) \cdot (1, -1, 1) = 1 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -1$$

Problema 16.5.3 (2 puntos)

- a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
- b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Solución:

- a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 > 0 \implies$ la función es siempre creciente.
- b) Es una función polinómica y, por tanto, continua:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene puntos de corte con el eje OX y, como esta función es creciente en R , concluimos que sólo hay un punto de corte. (Sólo hay una solución)

$f(0) = 1$ y $f(-1) = -2 \implies$ por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene el punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ de longitud 1.

Problema 16.5.4 (2 puntos)

- a) (1 punto). Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$
- b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

Solución:

- a) $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx = xe^{-x}]_1^4 = 4e^{-4} - e^{-1} = -0,29$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x} = \infty$

16.6. Septiembre 2015 - Opción B

Problema 16.6.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(donde $\ln$ denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo R .
- b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

La función es continua en $x = 0$ si $a = 0$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 2xe^x + x^2 e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \ln h}{h} = -\infty$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-) \implies$ la función no es derivable en $x = 0 \implies$ la función es derivable en $R - \{0\}$

$$c) \int_{-1}^0 f(x) dx = e^x(x^2 - 2x + 2) - x \Big|_{-1}^0 = 2 - \frac{5}{e} = 0,161$$

Problema 16.6.2 (3 puntos) Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0; \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
- b) (1 punto). Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .
- c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad |A| = -m^2 + m + 6 = 0 \implies m = 3, \quad m = -2$$

Para estos valores de m los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 3$:

$$h : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies h : \begin{cases} \vec{u}_h = (1, 2, 1) \\ P_h(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : x + 2y + z + \theta = 0 \implies -1 - 2 + 1 + \theta = 0 \implies \theta = 2 \implies \pi : x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Calculamos la recta $t \perp \pi_1$ y $P \in t$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_{\pi_1} = (1, 0, -1) \\ P_t(-1, -1, 1) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Calculamos P'' punto de corte de t con π_1 :

$$(-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \implies \lambda = 1 \implies P''(0, -1, 0)$$

Tenemos:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = (1, -1, -1)$$

$$d(QP') = |\overrightarrow{QP'}| = |(0, -1, -3)| = \sqrt{10} \, u$$

Problema 16.6.3 (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-5 \left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = -30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$2 \left(\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \right) = -12$$

Problema 16.6.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A , es decir que cumplen $AB = BA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c=3a+b \\ 3b+d=a \\ a=3c+d \\ b=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3b+d \\ b=c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3c+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Capítulo 17

Año 2016

17.1. Modelo 2016 - Opción A

Problema 17.1.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k .
- b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.
- c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \implies k = 1, \quad k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \quad |A| = 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \quad |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = 0;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < n^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \quad |A| = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango} \overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \implies \text{sistema incompatible.}$$

b) Si $k = 2$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

c) Si $k = 1$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 17.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, se pide:

- (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
- (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
- (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX , entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Solución:

a) $f'(x) = 4x - x^2 = 0 \implies x = 0 \text{ } x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

La función es decreciente en: $(0, 4)$

b) La función tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(4, 32/3)$.

c) Llamamos $g(a) = f'(a) = 4a - a^2$ y tenemos que optimizar esta función: $g'(a) = 4 - 2a = 0 \implies a = 2$ y $g''(a) = -2$, es decir $g''(2) = -2 < 0 \implies$ en $a = 2$ hay un máximo. La máxima pendiente de las rectas tangentes a $f(x)$ será: $g(2) = 4$.

d) $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 6$:

$$V = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} + \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^6}{9} \right]_0^6 = \frac{10368\pi}{35} u^3$$

Problema 17.1.3 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta

$$r : \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \text{ se pide:}$$

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \text{ y } \overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1)$

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : 3x + y - 3 = 0$$

b) $s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (1, 2, -1) \\ P_s = Q(2, 1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

Problema 17.1.4 (2 puntos) Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

- (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q . Describir dicho conjunto de puntos.
- (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

Solución:

- El conjunto de puntos $R(x, y, z)$ que equidistan de P y Q es un plano mediador:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \implies$$

$$2x + 4z - 9 = 0$$

- La recta que pasa por P y Q es:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{QP} = (1, 0, 2) \\ P_r = Q(0, 1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$S(x, y, z) = (\lambda, 1, 1 + 2\lambda)$$

$$d(P, S) = 2d(Q, S) \implies \sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2} = 2\sqrt{(1+\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2} \implies$$

$$\lambda = -2, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \implies S_1(-1, 1, -1), \quad S_2\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$$

17.2. Modelo 2016 - Opción B

Problema 17.2.1 (3 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

- (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2 .
- (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1 .
- (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

Solución:

a) El vector pedido es perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\vec{u} = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -8, -10) \quad |\vec{u}| = 10\sqrt{2}$$

El vector $\vec{v} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ es un vector paralelo a ambos planos.

$$\text{b) } d(P, \pi_1) = \frac{|9 - 4 - 10 - 7|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_{\pi_1} \cdot \vec{u}_{\pi_2}|}{|\vec{u}_{\pi_1}| \times |\vec{u}_{\pi_2}|} = \frac{(3, 4, -5) \cdot (1, -2, 1)}{\sqrt{50} \times \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problema 17.2.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

c) (1 punto). Calcular $\int_1^2 f(x) dx$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (1-x)e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) La función es continua y derivable en cualquier punto distinto de 1 ó 0, donde hacemos su estudio:

- Continuidad en $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \implies$ la función es continua.
Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1 \implies$ la función no es derivable en $x = 0$.

- Continuidad en $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \implies$ la función es continua.
Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = 0 \implies$ la función no es derivable en $x = 1$.

$$\text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$$

$$\text{c) } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x e^{1-x} dx = -(x+1)e^{1-x} \Big|_1^2 = 2 - \frac{3}{e}$$

Problema 17.2.3 (2 puntos) Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.
- (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Solución:

$$\text{a) } |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0 \implies$$

$$\lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

$$\text{b) } M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ es la matriz asociada a este sistema homogéneo}$$

que es claramente compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 17.2.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A .

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BA^t + 3B - 3B) = A^{-1}BA^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$