2º A BACH. CIENCIAS. UNA HOJA PARA PREPARAR EL PRIMER EXAMEN DEL CURSO: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

1) Si $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=b$ y $\lim_{x\to a}f(x)=c$, calcula $\lim_{x\to a}2g(x)$.

2) Si f es una función continua definida en $\mathbb{R}$ y que admite como asíntota la recta $y=x-1$, ¿se puede asegurar que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$?

3) ¿Es posible que dos funciones polinómicas distintas coincidan para todos los valores de un cierto intervalo $[a, b]$?

4) Si la función $f+g$ es continua en $x=2$, ¿puedes concluir que tanto f como g son continuas en ese punto?

5) Supón que f es continua en el intervalo $[1, 4]$ y que f nunca se anula en dicho intervalo. ¿Qué puedes decidir sobre los signos de $f(1)$ y de $f(4)$?

6) ¿Hay algún valor de k para el que la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 2k+1 & \text{si } x=0 \\ 3x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

sea continua en $x=0$?

7) Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{t(x)}$, con $g(x)$ y $t(x)$ polinomios y $t(x)\neq 0$ para cualquier x real, ¿cuál es el máximo número de asíntotas que puede tener la función $y=f(x)$?

8) Si f es continua en $x=2$, ¿cuál es el valor de $\lim_{x\to 2} f(x)-f(2)$?

9) Si $\lim_{x\to 3}(f(x)-7)=0$ y f es continua en $x=3$, ¿puedes asegurar que la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=7$?

10) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+1]=0$, ¿puede tener la función $y=f(x)$ dos asíntotas no verticales?

11) Si la función f, definida en $\mathbb{R}^+$, verifica que para todo $x>0$ es $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{100}$, justifica que la curva $y=f(x)$ no tiene ninguna asíntota horizontal.

12) Si $\lim_{x\to a}f(x)=b$ y $g(x)$ coincide con $f(x)$ excepto en $x=a$, ¿qué puedes decir sobre $\lim_{x\to a}g(x)$?

13) Si no existe $\lim_{x\to a}f(x)$ ni $\lim_{x\to a}g(x)$, ¿no existe necesariamente $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

14) El precio en euros de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

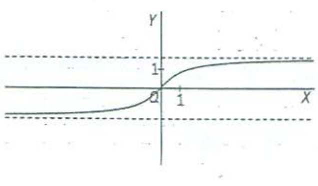
$$P(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } 0\le x\le 20 \\ \sqrt{ax^2+2000} & \text{si } x>20 \end{cases}$$

Determina el valor de la constante a para que la función $P(x)$ sea continua.

Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

15) Determina si las expresiones $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}$ y $g(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-3}$ corresponden a la misma función.

16) ¿Puede expresarse la función cuya gráfica es la de la figura con un cociente de polinomios?



17) Si $y=a$ es una asíntota horizontal de $y=f(x)$, entonces, ¿es posible que el valor a pertenezca al recorrido de la función f?

18) Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si $x=a$ no pertenece al dominio de f, entonces no existe $\lim_{x\to a}f(x)$".

19) Si la función f es un cociente de polinomios y el denominador se anula en $x=3$, entonces, ¿será la recta $x=3$ una asíntota vertical de $y=f(x)$ en todos los casos?

20) Si $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$, ¿es verdadero o es falso que entonces el número a no está en el dominio de f?

21) Para la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x\notin\mathbb{Z} \\ 3 & \text{si } x\in\mathbb{Z} \end{cases}$, ¿es verdadero o falso que la recta $y=0$ sea una asíntota horizontal de $f(x)$?

22) a) Si $g(x)=3x+2$ y $h(x)=9x^2+12x+1$, encuentra una función f tal que $f\circ g=h$.

b) Si $g(x)=2x-3$ y $h(x)=x^2+1$, encuentra una función f tal que $f\circ g=h$.

23) Pon un ejemplo de dos funciones f y g tales que no exista $\lim_{x\to 1}f(x)$ ni $\lim_{x\to 1}g(x)$, pero sí exista $\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))$.

24) Si existen $\lim_{x\to 1}f(x)$ y $\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x))$, ¿puede asegurarse que existe $\lim_{x\to 1}g(x)$?

25) Si $f(x)=g(x)$ salvo en 2009 puntos, ¿qué puedes decir de los límites de ambas funciones en $x=5$?

26) a) Comprueba gráficamente que si f, g y h son tres funciones tales que $f(x)\le h(x)\le g(x)$ y $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=l$, entonces $\lim_{x\to a}h(x)=l$.

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

27) Calcula las asíntotas oblicuas, si existen, de:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

b) $f(x)=2x+2^{-x}$

28) En cada caso, dibuja los puntos del plano (x, y) con $x\ge 0$ que verifican las condiciones:

a) $y=[x]$

b) $y=\dfrac{1}{[x]}$

c) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$

d) $y=\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$

29) ¿Hay algún número c para el que exista el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+4x+cx+2c}{x^2+x-2}$$

Calcula c y el límite correspondiente.

que sea un número

30) Dibuja la gráfica de la función

$$y=\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|$$

31) Determina de las siguientes afirmaciones cuáles son siempre ciertas y cuáles pueden ser falsas.

a) Si $f(1)<0$ y $f(2)>0$, debe haber un número c en $(1, 2)$ tal que $f(c)=0$.

b) Si f es continua en $[1, 2]$ y hay un número c en $(1, 2)$ tal que $f(c)=0$, entonces $f(1)$ y $f(2)$ deben ser de diferente signo.

c) Si f es continua en $[1, 2]$ y nunca se anula en $(1, 2)$, entonces $f(1)$ y $f(2)$ tienen el mismo signo.

32) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

A) Si $f(2)\cdot f(3)<0$, existe algún número $c\in(2, 3)$ con $f(c)=0$.

B) Si f es continua en $[2, 3]$ y no se anula alguna vez en dicho intervalo, entonces $f(2)\cdot f(3)>0$.

C) Si f es continua en $[2, 3]$, y no se anula alguna vez en ese intervalo, entonces $f(2)$ y $f(3)$ tienen diferente signo.

D) Si f es continua en $[2, 3]$, existe algún número $[2, 3]$ tal que $2f(c)=f(2)+f(3)$.

E) Si f es continua en $[2, 3]$ y $f:[2, 3]\to[2, 3]$, existe algún número c en $[2, 3]$ tal que $\dfrac{f(c)}{c}=1$.

33) 8. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones:

Si $f:[3, 7]\to\mathbb{R}$ es continua.

a) $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(3, 7)$.

b) $f(3)\cdot f(7)<0$.

A) a) es equivalente a b).

B) a) implica b) pero b) no implica a).

C) b) implica a) pero a) no implica b).

D) a) y b) no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las anteriores opciones es correcta.

34) 10. Sea g la función definida en $(0, \infty)$ mediante la fórmula $g(x)=\log\dfrac{2}{x}$ (Recuerda: log indica logaritmo natural o neperiano). Señala las respuestas correctas.

A) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

B) Si $a>1$, entonces $g(a)<g(2)$.

C) La gráfica de $g(x)$ no corta nunca al eje X.

D) La gráfica de $g(x)$ corta dos veces al eje Y.

E) El conjunto de números reales soluciones de la inecuación $g(x)\le 0$ es $[2, \infty)$.

35) Sea f la función $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$. Señala las respuestas correctas.

A) $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$.

B) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

C) f es continua en todos los puntos de su dominio.

D) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

E) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$.

36) La función f es continua en $[-2, 3]$ y verifica que $f(-2)=6$ y $f(3)=4$.

A) La ecuación $f(x)=0$ tiene, por lo menos, una solución en $[-2, 3]$.

B) La ecuación $f(x)=0$ no tiene solución en $[-2, 3]$.

C) La ecuación $f(x)=5$ tiene, por lo menos, una solución en $[-2, 3]$.

D) La ecuación $f(x)=5$ no tiene solución en $[-2, 3]$.

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

37) 7. Señala las opciones que sean correctas.

La ecuación $x^5+9x^3+b=0$,

A) Tiene, al menos, una solución real.

B) Tiene, al menos, dos soluciones reales.

C) Puede no tener ninguna solución real.

D) Puede tener sólo una solución real.

E) Puede tener más de una solución real.

38. PÀGINA 223, nº 49
39 PÀGINA 223, nº 50
40 PÀGINA 223, nº 51

(EN ESTOS TRES EJERCICIOS, HAZ SÓLO LOS APARTADOS QUE, EN PRINCIPIO, TE PLANTEARAN MAYOR DIFICULTAD)

41 PÀGINA 224, nº 59
42 PÀGINA 224, nº 61
43 PÀGINA 238, nº 15
44 PÀGINA 238 nº 16
45 PÀGINA 238, nº 17
46 PÀGINA 238, nº 18
47 PÀGINA 239, nº 19
48 PÀGINA 239 nº 24
49 PÀGINA 239 nº 25
50 PÀGINA 239 nº 28

51. PARA CADA UNA DE LAS FUNCIONES SIGUIENTES, DECIR CUÁLES ESTÁN ACOTADAS SUPERIOR O INFERIORMENTE Y CUÁLES TIENEN MÁXIMO O MÍNIMO.

$f: [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g: [-3,2] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

$h: [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x + [x]$ (RECUERDO: $[x]$ ES LA PARTE ENTERA DE x)

$j: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $j(x) = \frac{x}{1+|x|}$

52. PRUEBA QUE LA ECUACIÓN $x^3 - 37x^2 - 8 = 0$ TIENE UNA SOLUCIÓN MAYOR QUE 37. ENCUENTRA LA PRIMERA CIFRA DECIMAL DE DICHA SOLUCIÓN.

53. CONSTRUYE UNA FUNCIÓN $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA QUE VERIFIQUE: $0 \leq f(x) \leq 1$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ y $f(x) = 1$ si $|x| < 1$

54. EL NÚMERO DE ORDENADORES QUE TIENE EN STOCK UNA PEQUEÑA EMPRESA VIENE DADO POR LA FÓRMULA $N(t) = 10\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right] - t\right)$ DONDE EL TIEMPO, t, SE MIDE EN SEMANAS. ESBOZA LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN Y ESTUDIA SU CONTINUIDAD. ¿CADA CUÁNTO TIEMPO DEBE REPONER SU MERCANCÍA LA EMPRESA?

$[x]$ parte entera es el mayor entero menor o igual que x