

 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBAS DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE) Curso 2001-2002 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Junio Septiembre R1 R2
--	--	------------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

- (2 puntos) Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).
- (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

- (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f .
- (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f ; la recta anterior y el eje $x = 0$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t \quad ; \quad y = -1 + 2t \quad ; \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

- (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
- (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = -1$.
- (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Se pide:

- (0,5 puntos) Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir UNA Y SOLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

- a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
- b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x) dx = 1$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
- c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} ; \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

- a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s .
- b) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

4

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Para cada valor del parámetro real a , se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 \quad ; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1 \quad ; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3.$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n .

Se pide:

- a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A .
- b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
- c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = 2 \quad ; \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.
- b) (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. Nunca resolverá algunos ejercicios de la opción A y otros ejercicios de la opción B. En cualquier caso, sólo se evaluarán las respuestas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

- a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.
- b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a .
- b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

- a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A) \neq 0$) y expresar A^{-1} en función de A e I .
- b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$.
- c) (1 punto) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k .

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

- a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
- b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) (1 punto) Calcular A^{-1} .
- b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Para cada número real λ definimos la matriz $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

- a) (0,5 puntos) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.
- b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ .

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
- b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
- c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$.

- a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f .
- b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $\frac{1}{9}$, calcular el valor de p .

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBAS DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE) Curso 2002-2003 MATERIA: MATEMÁTICAS II	<u>Junio</u> Septiembre R1 R2
--	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa *Logaritmo Neperiano*).

$$a) (1 \text{ punto}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \quad b) (1 \text{ punto}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$.

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano

$$\pi \equiv x + 3y - z = 1,$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1},$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π , π' .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBAS DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Junio
Septiembre

Curso 2002-2003
MATERIA: MATEMÁTICAS II

R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 2, 0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y+z = 3 \\ 3x+z = 1. \end{cases}$$

- a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
 b) (1 punto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & + & 4y & + & 3z & = & 9 \\ mx & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array} \right\}$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.
 b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
 b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.
 c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el precio de cada tipo de billete.
- (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(donde I denota la matriz identidad).

- (1 punto) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

- (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- (1 punto) Dibujar su gráfica.
- (1 punto) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

- (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r .
- (2 puntos) Encontrar un plano π' , paralelo a π , tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir UNA Y SOLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Determinar los valores de las constantes A , B , C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A \sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

- (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I .
- (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
- (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6 \quad ; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π .
- (1,5 puntos) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta r .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Para cada valor del parámetro real k , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k .
- b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1) ; B(0, -2, 2) ; C(-1, 0, 2) ; D(2, -1, -2).$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
- b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A , B y C .
- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C .

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}.$$

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.
- c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
- d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota. - Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}.$$



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
 (Curso 2003-2004)

Junio
 Septiembre
 R1 R2

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a .

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0.$$

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2 .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar A^{-1} .
 b) (1 punto) Hallar la matriz X , tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A)

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
 b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (3 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores de parámetro k :

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x + 3y + kz = 3 \\ \pi_2 &\equiv x + ky - z = -1 \\ \pi_3 &\equiv 3x + y - 3z = -k \end{aligned}$$

- b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
 b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
 c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B .
- b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
- b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.

- a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π .
- b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ .
- c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7),$$

- a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f .
- c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
- b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
- b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
- c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
- c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje OX , la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

- b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBAS DE APTITUD PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (LOGSE)

Junio
Septiembre

Curso 2003-2004
MATERIA: MATEMÁTICAS II

R1 R2
Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$
b) (1 punto) Sean las funciones: $F(x) = \int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}} dt$, $g(x) = x^2$.
Calcular $(F(g(x)))'$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/(x^2 - x) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \rightarrow 1$.
b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

Discutir según los valores del parámetro λ , y resolver en los casos en que sea posible el sistema

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2\lambda z = 2 \\ \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 2\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos

Dado el plano

$$\pi: x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad r' \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad r'' \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r , r' y r'' estén alineados. (1,5 puntos)
b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos. (0,75 puntos)
c) Calcula la distancia de dicha recta al origen. (0,75 puntos)

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos

Se consideran las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$$

- Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
- Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntosCalcular unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{(1 + (\sin x)^2)}$$

Se pide:

- (1 Punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.
- (1 Punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.
- (1 Punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4))$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntosSe considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{cases}$$

Se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a .
- (1 punto) Resolver el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE) Curso 2004-2005 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Junio Septiembre R1 R2
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y

$$\int_0^1 2xf'(x)dx = 1. \text{ Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar } \int_0^1 f(x)dx.$$

2. (2 puntos). Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- i) tiene un máximo relativo en $x = 1$.
- ii) tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- iii) se verifica:

$$\int_0^1 p(x)dx = 5/4$$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos). Discutirlo según los distintos valores de m .
 - b) (1,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.
4. (3 puntos). Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:
- a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.
 - b) (2 puntos). Calcular los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P es igual a 3.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

- b) (1 punto). Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación:

$$5x + y + \alpha z = \beta$$

el sistema resultante sea compatible indeterminado.

2. (2 puntos). Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1} X A = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (3 puntos). Calcular los siguientes límites:

- a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

- b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

4. (3 puntos). Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

- a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

- b) (1,5 puntos). Calcular la mínima distancia entre r y s.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE) Curso 2004-2005 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Junio <u>Septiembre</u> R1 R2
--	---	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x + z = \lambda$$

$$\pi_2: 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$$

$$\pi_3: 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$$

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- a) (1 punto). Hallar la recta t , perpendicular a r y a s , que pasa por el origen.
b) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).
3. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
b) (1 punto). Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
c) (1 punto). Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.
4. (3 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:
a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.
c) (1 punto). Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde $\ln$ significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

2. (2 puntos). Se considera la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

- a) (1 punto). Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.
b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x) dx = 1/4$$

3. (3 puntos). Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

- a) (1 punto). Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
b) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.
c) (1 punto). Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$r: \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

4. (3 puntos). Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Hallar A^{10} .
b) (1 punto). Hallar la matriz inversa de B .
c) (1 punto). En el caso particular $k=0$, hallar B^{10} .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBAS DE APTITUD PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (LOGSE)

Curso 2004/2005

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio
Septiembre

R1 R2

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determinar el punto P , contenido en el primer cuadrante, en el que se cortan la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \frac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema.
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0.$$

- b) (1 punto) Hallar A^n .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde $\ln$ significa *Logaritmo Neperiano*.

- a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad.
- b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f .
- c) (1 punto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$, y la familia de rectas dependiente del parámetro m :

$$s \equiv \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

- a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
- b) (1 punto) Para el caso $m = 0$, hallar la distancia entre las rectas r y s .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
 Curso 2005-2006
MATERIA: MATEMÁTICAS II

6
 Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio figura en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

2. (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

3. (3 puntos). a) (1 punto). Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto). Demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto). Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$.

4. (3 puntos). Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\mathbf{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi: z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

2. (2 puntos). Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \quad s: \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

3. (3 puntos). Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1,5 puntos). Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
 b) (1,5 puntos). Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.
4. (3 puntos). a) (1,5 puntos). Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

- b) (1,5 puntos). Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)
 Curso 2005-2006
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica..

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$

2. (2 puntos). a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x .

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

3. (3 puntos). Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto). Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$.

b) (0,5 puntos). Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$? Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos). Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que:
 $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$.

4. (3 puntos). Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B .

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B .

c) (1,5 puntos). Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .

OPCIÓN B

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

- b) (1 punto). Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

2. (2 puntos). a) (1 punto). Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

- b) (1 punto). Para una cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular

$$M = A + A^2 + \dots + A^{10}$$

3. (3 puntos). Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

- a) (1,5 puntos). Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

- b) (1,5 puntos). Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

4. (3 puntos). Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$. Se pide:

- a) (1,5 puntos). Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen), sea 2.

- b) (1,5 puntos). Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

MODELO

Curso 2005-2006

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi: x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = k \\ x + 2y + 3z = 2 \\ kx + ky - 4z = -1 \end{cases}$$

- a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores de k .
 b) (1 punto). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

4. (3 puntos). Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

- a) (2 puntos). Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.
 b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x) dx = -1$$

OPCIÓN B

1. (2 puntos). a) (1 punto). Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

- b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

2. (2 puntos). Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular sus extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

- b) (1 punto). Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

3. (3 puntos). Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

- a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

- b) (1,5 puntos). Calcular la distancia de s al plano anterior.

4. (3 puntos). Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1,5 puntos). Hallar $(A - I)^2$.

- b) (1,5 puntos). Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m .

2. (2 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $AXX^{-1} = B$.

3. (3 puntos). Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$

y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

- (1,5 puntos). Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π .
 - (1,5 puntos). Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π .
4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.
- (1,5 puntos). Para cada valor de m hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.
 - (1,5 puntos). Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

2. (2 puntos). Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3. (3 puntos). Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir a , b , c para que se verifique $AB=BA$.

b) (1,5 puntos). Para $a=b=c=1$, calcular B^{10} .

4. (3 puntos). Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$, $C(\lambda, 0, \lambda+2)$.

a) (1 punto). ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A , B y C están alineados?

b) (1 punto). Comprobar que si A , B , C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto). Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE) Curso 2006-2007 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Septiembre
---	---	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
b) (1 punto). Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.
4. (3 puntos). a) (1,5 puntos). Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

- b) (1,5 puntos). Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (2 puntos). Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
b) (1 punto). Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

3. (3 puntos). Sean las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \quad s: \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
b) (1,5 puntos). Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .

4. (3 puntos). Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

- i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

- a) (1 punto). Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
b) (1 punto). Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.
c) (1 punto). Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Se consideran la recta $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r , hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A , P y Q tenga área 1.

2. (2 puntos). a) (1,5 puntos). Calcular la ecuación general del plano π_1 que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x + y - z = 2$.

- b) (0,5 puntos). Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

- a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores de k .

- b) (1 punto). Resolverlo para $k = -1$.

4. (3 puntos). a) (1 punto). Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo:

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

- b) (2 puntos). Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t) dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

- (1 punto). Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
- (1 punto). Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX .

2. (2 puntos). Obtener el valor de k sabiendo que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

3. (3 puntos). Se consideran el punto $P(1,0,1)$, la recta:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi: x + y + z = 0$. Se pide:

- (1,5 puntos). Obtener el punto P' , simétrico de P respecto del plano π .
 - (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π .
4. (3 puntos). Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 puntos). Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ .
- (1,5 puntos). Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M . Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
- (1 punto). Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos). Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la siguiente matriz de orden n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_2 .
- b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_3 .
- c) (2 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_5 .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1,5 puntos). Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

- b) (1,5 puntos). Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

- a) (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
- b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .
- c) (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .
- b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π y r .
- c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY .
- d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2007-2008
MATERIA: MATEMÁTICAS II



Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

- (2 puntos). Dibujar la gráfica de f , estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
- (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $P(1, 1, 3)$, $Q(0, 1, 0)$, se pide:

- (1 punto). Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R . Describir dicho conjunto de puntos.
- (1 punto). Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P, S) = 2 \text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4},$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1,5 puntos). Calcular:

$$\int x^3 \ln(x) dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x .

b) (1,5 puntos). Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .b) (2 puntos). Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 , π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.**Ejercicio 3.** Calificación máxima: 2 puntos.

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3v = -4 \\ x + 2y + z + 3v = 4 \\ 2x - 4y + 2z - 6v = -8 \\ 2x \quad \quad + 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

MODELO

Curso **2007-2008**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
 No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Se considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

a) (1 punto). Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

2. (2 puntos). Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5}$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y + (2m+1)z = 3m + 4 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro real m .

b) (1 punto). Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

4. (3 puntos). Sean los puntos A(1, 0, 2) y B(1, 1, -4).

a) (1 punto). Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto). Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto). Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

2. (2 puntos). Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:
 a) (1 punto). Determinar para qué valor de k el triángulo ABC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.
 b) (1 punto). Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

3. (3 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.
 b) (1 punto). Calcular A^{10} .
 c) (1 punto). Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2.$$

4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$

Se pide:

- a) (1,5 puntos). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo $\mathbf{R}$.
 b) (1,5 puntos). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f , el eje horizontal y las rectas $x=1$, $x=3$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2008-2009
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:

- (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π .
- (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases},$$

se pide:

- (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
- (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
- b) (1 punto). Determinar la distancia entre las rectas r y s .
- c) (1 punto). Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5),$$

obtener:

- a) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- b) (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
- d) (1 punto). La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases},$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
- b) (0,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea posible.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a .
- b) (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2008-2009
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1,25 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
- (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
- (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

se pide:

- (1,5 puntos). Hallar los valores de los parámetros a , b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
- (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a , b para los cuales las rectas r , s se cortan perpendicularmente.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.b) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.c) (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.**Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .**Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.**

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = 5$.**Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.**

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Modelo para Curso 2008-2009
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π , se pide:

- (0,5 puntos). Determinar la posición relativa de π y r .
- (1 punto). Calcular la ecuación de la recta t contenida en π , que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r .
- (1,5 puntos). Sea Q el punto de intersección de r y t . Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P , y R es un punto cualquiera de s , probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12} (1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

- (1 punto). Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- (1 punto). Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$.
- (1 punto). Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases}$$

- (1 punto). Discutirlo según los distintos valores del parámetro k .
- (1 punto). Resolverlo en los casos en que sea posible.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2 - 1) & x + 1 & (x + 1)^2 \\ x - 1 & x + 1 & x + 1 \\ (x - 1)^2 & x - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0$, se pide:

- a) (1,5 puntos). Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P . Hallar el punto R simétrico del punto P respecto del plano π .
- b) (1,5 puntos). Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3 , y se sabe que $\det(A) = 4$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular $\det(A^3)$ y $\det(3A)$.
- b) (2 puntos). Calcular $\det(B)$ y $\det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto). Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

donde $\ln(x)$ significa logaritmo neperiano de x . Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)

Curso 2009-2010
MATERIA: MATEMÁTICAS II

F.G.
Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- (0'75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- (0'75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- (0'75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4},$$

se pide:

- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .
- (1 punto) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ x - 4y + kz = 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- (1 punto) Resolverlo para el caso $k = 3$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Hallar dos constantes a, b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x}, & \text{si } x > 0, \\ x + k, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.
- (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay - z = a, \\ ax + 2z = -2, \\ x + z = -2, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a .
- (1 punto) Resolverlo en el caso $a = 0$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=3, \\ 2x-y=2, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea π el plano que contiene a los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ y $R = (0, 0, 3)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)

Curso 2009-2010
MATERIA: MATEMÁTICAS II

F. G.
Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (2 puntos) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m .
- (1 punto) En el caso $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1, \\ z = 3, \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- (1 punto) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los límites:

$$\text{a) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}, \quad \text{b) (1 punto) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular:

$$\text{a) (1 punto) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx,$$

$$\text{b) (1 punto) } \int_0^\pi x \cos x dx.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
- (1 punto) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .
- (1 punto) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + z = 3, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la compatibilidad del sistema.
- (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
- (1 punto) ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)

Curso 2009-2010
MATERIA: MATEMÁTICAS II

F.E.
Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$,

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$, c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Hallar:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$.

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1,$$

se pide:

- (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.
- (1 punto) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π .
- (1 punto) Para el valor $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π .
- (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3, \\ x + y - 2z = 0, \\ 5x + (m+1)y + z = 9. \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de m .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso $m = 0$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para qué valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)

Curso 2009-2010
MATERIA: MATEMÁTICAS II

F.E.
Septiembre.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 - \lambda, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y - z = -1, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B .

a) (1 punto) Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0'5 puntos) Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1'5 puntos) Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener el valor de a para que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4.$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Hallar:

a) (0'5 puntos) $\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx.$

b) (1'5 puntos) $\int_9^{11} (x - 10)^{19} (x - 9) dx.$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + kz = k, \\ x + ky + z = k^2, \\ kx + y + z = 1, \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro k .
- b) (1 punto) Resolverlo para $k = 0$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- a) (1'5 puntos) Estudiar y obtener las asíntotas.
- b) (1 punto) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- c) (0'5 puntos) Representar gráficamente la función.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = -2, \\ x - 2y = -1, \end{cases} \quad s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2},$$

se pide:

- a) (1 punto) Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B , sea paralela a la recta s .
- b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos

$$\pi_1 \equiv 5x - y - 7z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 5.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO

MODELO

Curso 2009/2010
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- a) (1,5 puntos). Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) (1 punto). Estudiar para qué valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- c) (0,5 puntos). Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

- a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s , y que contiene al origen de coordenadas.
- b) (1,5 puntos). Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener, para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Discutir razonadamente, en función del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k + 1) \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x,$$

se pide:

- (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases},$$

se pide:

- (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ .
- (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
- (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y B .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r , y que pasa por el origen de coordenadas $O = (0, 0, 0)$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2010-2011
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix},$$

- (1 punto) Calcular el rango de A en función de los valores de a .
- (1 punto) En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b , y resolverlo cuando sea posible.
- (1 punto) En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- (1'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

- (1'5 puntos) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Calcular la integral $\int_1^3 x \sqrt{4 + 5x^2} dx$.
- (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

- (1 punto) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

se pide:

- a) (1 punto) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a , obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- b) (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- c) (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix},$$

según los valores de m .

- b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1,$$

se pide:

- a) (0'5 puntos) Estudiar su posición relativa.
- b) (1'5 puntos) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- b) (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$.
- c) (0'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)
Curso 2010-2011
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}.$$

b) (1 punto) Calcular la integral $\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx$.

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2},$$

se pide:

- a) (1 punto) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
- b) (1 punto) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
- c) (1 punto) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz M .
- b) (1 punto) Hallar la matriz M^2 .
- c) (0,5 puntos) Hallar la matriz M^{25} .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$

se pide:

- (1'5 puntos) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r .
- (1'5 puntos) Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4y &= 4k, \\ -k^3x + k^2y + kz &= 0, \\ x + ky &= k^2, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo en función del valor del parámetro k .
- (0'5 puntos) Resolver el sistema para $k=1$.
- (0'5 puntos) Resolver el sistema para $k=2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{si } x < 0, \\ k, & \text{si } x = 0, \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x}, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x=0$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.
- (1 punto) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2010-2011
 Modelo - Ejemplo

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & +\lambda z & = & 2 \\ x & +\lambda y & -z & = & 1 \\ x & +3y & +z & = & 2\lambda \end{cases},$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
- b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2},$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de f .
- b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1},$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de las rectas r , s .
- b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r , s .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$, $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

- a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β .
- b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$.
- b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.
- c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$, $C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$, $E(1, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto). Demostrar que los puntos A , B , C , D son coplanarios.
- b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.
- c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A , B , C , D .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$.
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$.

siendo $\tan x$ la tangente trigonométrica de x .**Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.**

Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO

Curso 2011-2012
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k .
- (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.
- (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- (1 punto) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- (1 punto) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

$$\text{a) (1 punto) } \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, dx, \quad \text{b) (1 punto) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \quad g(x) = (\ln x)^x, \quad h(x) = \sin(\pi - x),$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) (1 punto) Calcular $g'(e)$.
- c) (1 punto) Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda, \\ y = 3 + \lambda, \\ z = 5, \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar su posición relativa.
- b) (2 puntos) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz B en función de a .
- b) (1 punto) Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO

1

Curso 2011-2012
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A, & \text{si } x \leq 3, \\ -4 + 10x - x^2, & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ?
- (1 punto) Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
- (1 punto) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6, \\ x + (a+1)y + z = 3, \\ (a-1)x - ay - 3z = -3, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores de a .
- (1 punto) Resolverlo para $a = -1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Se dan la recta r y el plano π , mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0.$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \begin{cases} x+y=4, \\ 2x+z=4, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2, 3, 4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
- (0,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4, -1, 2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.
- (1,25 puntos) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x - 1 = y - 1 = z$.
- (1,25 puntos) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

- (1 punto) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
- (1 punto) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$.
Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, vectores columna. Si

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2,$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

- (0,5 puntos) $\det(\vec{a}, 3\vec{a}, \vec{b})$.
- (0,75 puntos) $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.
- (0,75 puntos) $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x & & - & 2z & = & 2, \\ ax & - & y & + & z & = & -8, \\ 2x & & & + & az & = & 4, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a .
- (0,5 puntos) Resolverlo para $a = -5$.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2011-2012 MATERIA: MATEMÁTICAS II	MODELO
--	---	------------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 3)$, se pide:

- a) (2 puntos) Hallar todos los puntos que equidistan de A , B y C . ¿Cuáles de ellos pertenecen al plano

$$\pi \equiv 2x + 2y + 2z + 1 = 0 ?$$

- b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que pasa por A , B , C .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ -3x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + my - 5z = -4, \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores de m .
b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2}, & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sin 2x}{x}, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \quad \text{y} \quad f(4) = -1;$$

hallar:

- a) (0'5 puntos) $\int_2^5 f(x) dx$.
- b) (1 punto) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$.
- c) (1'5 puntos) $\int_2^4 F(x)f(x) dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 3x + y = -a, \\ -3x + 2ay = 7, \end{cases}$$

se pide:

- a) (1'5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
- b) (1'5 puntos) Resolver el sistema cuando sea compatible.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi \equiv x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' \equiv 2x + 2y - z - 2 = 0,$$

se pide:

- a) (1 punto) Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.
- b) (1 punto) Hallar todos los puntos que equidistan de π y π' .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar la posición relativa de las rectas r y s .
- b) (1 punto) Hallar la distancia mínima entre r y s .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2012-2013
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1, \\ y - z = -1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 3, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s .
- (1 punto) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
- (1 punto) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0, \\ x + ay + z = 3, \\ y + z = -2, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los valores de a .
- (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 4$.
- (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a = 2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:

- (1 punto) Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) (1 punto) } \int \frac{x-3}{x^2+9} dx. \quad \text{b) (1 punto) } \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$, se pide:

- a) (1 punto) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) (1 punto) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- c) (1 punto) Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.
- b) (1 punto) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.
- c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$, con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.
- b) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el punto $P(1, 0, -1)$, el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0, \\ 3x - z - 3 = 0, \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación del plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π .
- b) (0,5 puntos) Hallar el ángulo entre r y π .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2012-2013
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Hallar las asíntotas de su gráfica.
- (1,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
- (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

se pide:

- (1,5 puntos) Calcular el determinante de A . Determinar el rango de A según los valores de a .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.
- (1 punto) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $A(2, -2, 1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-2, 0, -4)$, $D(2, -6, 2)$, se pide:

- (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

- (1 punto) Hallar el punto de tangencia P' .
- (1 punto) Hallar la ecuación de S .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Sean r_A la recta con vector dirección $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector dirección $(1, 1, 1)$ que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.
- b) (1,5 puntos) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .
- c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda, \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda, \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1, \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro λ .
- b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.
- c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.
- b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 x f(x) dx$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- b) (1 punto) Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2012-2013 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Examen para coinciden. Junio
--	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = 2\lambda, \\ x + y + z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de λ .
- (1,5 puntos) Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la familia de rectas $r_a \equiv \begin{cases} z = 0, \\ x - ay - 3 = 0, \end{cases}$ (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

- (0,75 puntos) Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.
- (1,5 puntos) Dado el punto $P(0, 0, 1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a . Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3, 0, 0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a .
- (0,75 puntos) Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

- (1 punto) Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.
- (1 punto) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x < 0, \\ 1 + xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.
- (1 punto) Calcular, en función de a , la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.
- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} 4x + y + 5z = 0, \\ 5y - 3z = 0, \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0, \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa entre ellas.
- (1 punto) Hallar la mínima distancia entre r y s .
- (1 punto) Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sean A y B matrices 2×2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

- (0,5 puntos) Hallar $\det[B^{-1}A^2B^2]$.
- (0,5 puntos) Hallar $\det\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.
- (1 punto) Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1 \ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda + 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Determinar λ para que A sea invertible.
- (1 punto) Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2012-2013
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Ex. para
coincidentes
Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Se contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A .
- (1 punto) ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?
- (1 punto) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{m} = z$, se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m .
- (1 punto) Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- (1 punto) Para $m = -2$, determinar el punto de corte de r y π .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

- (1,5 puntos) Hallar los valores de a , b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2/3$ y corte al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.
- (0,5 puntos) ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25, & \text{si } x \leq 1, \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2}, & \text{si } 1 < x < 2, \\ \frac{5 \ln(1+x^2)}{\ln 5}, & \text{si } 2 \leq x, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.
- (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{x^2 + 1}$, se pide:

- (1 punto) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.
- (0,5 puntos) Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.
- (1,5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas, y su crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\pi_a \equiv x + 2y + az - 1 = 0$$

(al variar a en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{2}$, se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .
- (1 punto) Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a , y en caso afirmativo calcular dichos valores de a .
- (1 punto) Si $a = 1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0, \\ 3x + 2y + az = 0, \\ 7x + 9y + 9z = 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a .
- (0,5 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO 2012 - 2013 MATERIA: MATEMÁTICAS II	MODELO
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x-1}, & \text{si } x < 0, \\ a, & \text{si } x = 0, \\ e^{-1/x}, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- (1 punto) Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
- (1 punto) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3, \\ x + y + (4+m-m^2)z = 3, \\ 2x + 4y + 3(m+2)z = 8, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m .
- (1 punto) Resolverlo para $m = -2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1, 2, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.
- (1 punto) Hallar el punto común a los tres planos π_3, π_4, π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4, \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10,$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3, \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r .
- (1 punto) Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1, 1, 1)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (1 punto) Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y + z = 3, \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = -\lambda. \end{cases}$$

- b) (1 punto) Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x + 2y + z = 3, & \pi_2 &\equiv 2x + 3y - z = 5, \\ \pi_3 &\equiv 2x + 2y + 4z = 3, & \pi_4 &\equiv x + 3y = a, \end{aligned}$$

tengan un único punto en común.

- c) (1 punto) Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 \equiv 2x + 5y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_6 \equiv 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1, 5, -3)$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (0'5 puntos) Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.
 b) (1'25 puntos) Calcular el área de dicho recinto.
 c) (1'25 puntos) Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.
 b) (0'5 puntos) Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.
 c) (0'5 puntos) Calcular la inversa de la matriz A .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) (1 punto) Calcular la matriz $A - B$.
 b) (1 punto) Calcular las matrices A y B .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2013-2014
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1,5 puntos) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.
- (1 punto) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?
- (0,5 puntos) Si $\alpha = -1, \beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π .
- (1 punto) Hallar la distancia de P a r .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \quad \text{y} \quad f''(-2).$$

- (1 punto) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular justificadamente:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x), & \text{si } x < 0, \\ x^2 e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

(donde $\ln$ denota logaritmo neperiano) se pide:

- a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) (1 punto) Calcular el valor de a , para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbf{R}$.
- c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y - 2z = 2, \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π .
- b) (1 punto) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- c) (1 punto) Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r , y es paralela a π .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.
- b) (1 punto) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A , en el caso $a = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

- a) (1 punto) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.
- b) (1 punto) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2013-2014

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

- (1 punto) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
- (1 punto) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.
- (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto) Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto) Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

- (1 punto) Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

- (1 punto) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
- (1 punto) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3 .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π .
- (1 punto) Calcular la distancia entre r y π .
- (1 punto) Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \operatorname{sen} x}{2x} + \frac{1}{2}, & \text{si } x < 0, \\ a, & \text{si } x = 0, \\ xe^x + 3, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
- (1 punto) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .
- (1 punto) Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx,$$

donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- (1 punto) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- (1 punto) Calcular B en el caso $a = 1$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2013-2014
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Ex. para
coincidentes.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ y - z = a, \\ x + y - z = 3a^2, \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de a .
- b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.
- b) (1 punto) Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.
- c) (1 punto) En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

- a) (1 punto) Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0, 0, 0)$ que es tangente a π .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Sean los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, -4)$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.
- b) (1 punto) Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2, -1, 1)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-8}{-3},$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia de la recta al plano.
- b) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5, -2, 1)$ sobre el plano π .
- c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $Q(-1, 7, 3)$ sobre la recta r .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

- a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.
- b) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.
- c) (1 punto) El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

- a) (1 punto) Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.
- b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1}$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular:

a) (1 punto) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$.

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO 2013/2014 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Modelo
--	--	-------------------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (0,5 puntos) Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto) Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.
- (1,5 puntos) Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0, \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0,$$

se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.
- (1 punto) Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .
- (1 punto) Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los siguientes límites:

$$a) \text{ (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}, \quad b) \text{ (1 punto) } \lim_{x \rightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x) dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x - 5) g'(x) dx.$$

- (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u) du = 1/2$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2}) e^{x/2} dx.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6}{x - 1}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Estudiar su continuidad.
- (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
- (1,25 puntos) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda, \\ y = -6 + 2\lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ 2x + z - 6 = 0. \end{cases}$$

- (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (a+2)x + (a+1)y = -6, \\ x + 5y = a, \\ x + y = -5, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores de a .
- (0,5 puntos) Resolverlo cuando sea posible.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

$$\text{a) (1 punto)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{b) (1 punto)} \quad \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
 Examen-Modelo para el curso 2014-2015
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar el rango de A según los valores de m .
- (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A^{20} .
- (0,75 puntos) Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.
- (0,75 puntos) Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar el dominio de $f(x)$.
- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (1,5 puntos) El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1, \\ y = z, \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.
- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s , y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

- (0,5 puntos) Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.
- (0,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π .
- (1 punto) Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1 .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4, \\ x - y - 3z = -2, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular la mínima distancia entre r y s .
- (1 punto) Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r .
- (1 punto) Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Hallar:

- (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.
- (1 punto) $\int (3x + 5) \cos x \, dx$.
- (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1,5 puntos) Hallar X e Y , matrices 2×2 , tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (0,5 puntos) Hallar Z , matriz invertible 2×2 , tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + y = 0, \\ x + my = 0, \\ mx + my = 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1,5 puntos) Discutirlo según los valores de m .
- (0,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2014-2015
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio
2015

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1},$$

donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, se pide:

- (1'5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
- (0'75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
- (0'75 puntos) Calcular $\int f(x) dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- (2 puntos) Discutir, según los valores de m , el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.
- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O , y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Determinar un punto Q de la recta r , de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.
- (1 punto) Determinar la distancia de P a r .
- (1 punto) ¿Existe algún punto R de la recta r , de modo que los puntos O , P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x < 0, \\ xe^x + 1, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad de f .
- (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
- (1 punto) Calcular $\int_1^3 f(x) dx$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Calcular A^{15} y A^{20} .
- (1 punto) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1'25 puntos) Hallar el rango de A en función de t .
- (0'75 puntos) Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2014-2015
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Septiembre
2015

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0, \\ x - my + 3z = 4, \\ 2x - 2y - z = 0, \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m .
- (0'5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.
- (0'5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

- (2 puntos) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.
- (1 punto) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (0'5 puntos) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
- (1'5 puntos) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$.
- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln(x), & \text{si } x > 0, \\ x^2 e^x, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

(donde $\ln$ denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

- a) (1 punto) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- b) (1 punto) Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0, \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0,$$

se pide:

- a) (1 punto) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.
- b) (1 punto) Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .
- c) (1 punto) Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) (1 punto) } \begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad \text{b) (1 punto) } \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A , es decir que cumplen $AB = BA$.



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
2015-2016
MATERIA: MATEMÁTICAS II

MODELO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1, \\ 2x + 4y + z = 3, \\ kx + 2y - z = 3, \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de k .
- b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 2$.
- c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3},$$

se pide:

- a) (0,75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) (0,5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
- c) (0,75 puntos) El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
- d) (1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX , entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + y - z = 2, \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.
- b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q . Describir dicho conjunto de puntos.
- b) (1 punto) Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0,$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2 .
- b) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1 .
- c) (1 punto) Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1, \\ x e^{1-x}, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.
- b) (0,5 puntos) Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 f(x) dx$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.
- b) (1 punto) Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A .

